Fırsatlar Sunar

Analiz IV Ders Notları

Aynı şeyi kompakt kümeler için söyleyemeyiz. Ama sürekli fonk.ların görüntüleri kompaktlığı korur.

7. Teorem: Eğer $K \subset \mathbb{R}^n$ bir kompakt alt küme ve $f: K \to \mathbb{R}^m$ bir sürekli fonk. olsun. O zaman $f(K)$ kümesi de $\mathbb{R}^m$ de kompakttır.

İspat. $f(K)$ nın bir açık örtüsü $\{V_i \mid i \in I\}$ olsun. Yani $f(K) \subset \bigcup_{i\in I} V_i$ dir. Buradan

$$K \subset f^{-1}(f(K)) \subset f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} V_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(V_i)$$

elde edilir. O zaman $\{f^{-1}(V_i) \mid i \in I\}$ ailesi K nın bir açık örtüsüdür. K de kompakt ololuğundan $K \subset \bigcup_{j=1}^{N} f^{-1}(V_{i_j})$ olacak şekilde sonlu bir $\{i_1, i_2, \ldots, i_J\} \subset I$ alt kümesi vardır.

Şu halde

$$f(K) \subset f\left(\bigcup_{j=1}^{N} f^{-1}(V_{i_j})\right) = \bigcup_{j=1}^{N} (f \circ f^{-1})(V_{i_j}) \subset \bigcup_{j=1}^{N} V_{i_j}$$

olur ve buna göre $f(K)$ bir kompakt kümedir.

8. Teorem. Eğer $E \subset \mathbb{R}^n$ bir bağlantılı alt küme ve $f: E \to \mathbb{R}^m$ bir sürekli fonksiyon ise $f(E) \subset \mathbb{R}^m$ bir bağlantılı alt kümedir.

İspat. $f(E)$ nin bağlantılı olmadığını varsayalım. O zaman $\mathbb{R}^m$ de $U \cap f(E) \neq \emptyset$, $V \cap f(E) \neq \emptyset$, $U \cap V = \emptyset$ ve $f(E) \subset U \cup V$ olacak şekilde U ve V açık kümeleri vardır. Bu durumda $f^{-1}(U) \cap E \neq \emptyset$, $f^{-1}(V) \cap E \neq \emptyset$, $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$ ve

$$E = (f^{-1}(U) \cap E) \cup (f^{-1}(V) \cap E)$$

olur. O halde $f^{-1}(U) \cap E$ ile $f^{-1}(V) \cap E$ göreceli açıkları

E yi ayırır, dolayısıyla E bağlantılı olmaz. #

Bu aşamada tek değişkenli fonkılar için bilinen ekstremum değer teoremini çok değişkenli fonkılara genişletebiliriz.

9. Teorem. $K \subset \mathbb{R}^n$ boş olmayan bir kompakt alt küme olsun ve bir $f : K \to \mathbb{R}$ sürekli fonk verilsin. O zaman

$$m = \inf\{f(x) \mid x \in K\} \text{ ve } M = \sup\{f(x) \mid x \in K\}$$

olmak üzere $m \in \mathbb{R}$, $M \in \mathbb{R}$ ve $m = f(x_m)$, $M = f(x_M)$ o.ş. $x_m \in K$ ve $x_M \in K$ vardır.

İspat. m için ispatı verelim, M içinde benzer yol izlenir.

f sürekli, K kompakt verildiğinden, $f(K)$ kompakttır. Heine-Borel teoremine göre $f(K)$ kapalı ve sınırlıdır.

O zaman $f(K) \subset \mathbb{R}$ alt kümesinin infimumu vardır, yani $m \in \mathbb{R}$ dir.

İnfimum tanımı gereğince her $k \in \mathbb{N}$ için $f(x_k) \in K$ ve $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = m$ olacak şekilde bir (x_k) dizisi vardır. $f(K)$ kapalı olduğu için $m \in (f(K))' \subset f(K)$ olur. Buna göre $m = f(x_m)$ olacak şekilde bir $x_m \in K$ noktası bulunur. #

10. Teorem (Ara-değer teoremi). $E \subset \mathbb{R}^n$ bir bağlantılı alt küme olsun. Yine $f: E \to \mathbb{R}$ bir sürekli fonk. ve $a \in E$, $b \in E$ olmak üzere $f(a) \neq f(b)$ olsun. Bu takdirde $f(a) < y < f(b)$ koşulunu sağlayan her $y \in \mathbb{R}$ için $y = f(x)$ olacak şekilde bir $x \in E$ vardır.

İspat. E bağlantılı ve f sürekli olduğundan $f(E) \subset \mathbb{R}$ bir bağlantılı alt kümedir. $\mathbb{R}$ içindeki bağlantılı kümeler aralık olduğundan $f(E)$ bir aralıktır. Buna göre $y \in f(E)$ ve dolayısıyla bir $x \in E$ için $y = f(x)$ tir. #

(24)

Şimdi düzgün süreklilik kavramını çok değişkenli fonk.lara genişletelim:

TANIM. $E \subset \mathbb{R}^n$ ve $f: E \to \mathbb{R}^m$ bir fonk. olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$'a karşılık

$$x_1, x_2 \in E \wedge \|x_1 - x_2\| < \delta \Rightarrow \|f(x_1) - f(x_2)\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ bulunabiliyorsa, f fonk.un 'E üzerinde düzgün sürekli' olduğu söylenir.

Bu tanıma düzgün sürekli fonk.lar süreklidir. Ama sürekli fonksiyonlar düzgün sürekli olmayabilir. Bu aşamada bu ilişkiyi değerlendireceğiz.

11. Teorem. $E \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere $f: E \to \mathbb{R}^m$ bir düzgün sürekli fonk. olsun. O zaman (x_k) dizisi E de bir Cauchy dizisi ise, $(f(x_k))$ dizisi de $\mathbb{R}^m$ de bir Cauchy dizisidir.

İspat. $\forall \varepsilon > 0$ verilsin. Düzgün süreklilik tanımına göre

$$\exists \delta > 0 \ni x_1, x_2 \in E \wedge \|x_1 - x_2\| < \delta \Rightarrow \|f(x_1) - f(x_2)\| < \varepsilon$$

yazılır. Eğer (x_k) dizisinin Cauchy dizisi olduğu kullanılırsa bu $\delta > 0$'a karşılık

$$\exists N \in \mathbb{N} \ni \forall k, \ell \geq N \text{ için } \|x_k - x_\ell\| < \delta$$

yazılır. Böylece $\forall k, \ell \geq N$ için $\|f(x_k) - f(x_\ell)\| < \varepsilon$ olur, buna göre $(f(x_k))$ dizisi $\mathbb{R}^m$ de bir Cauchy dizisidir. #

Bu teoreme göre düzgün sürekli fonksiyonlar Cauchy dizilerini Cauchy dizisine dönüştürür.

12. Teorem. $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt bir alt küme ve $f: K \to \mathbb{R}^m$ bir fonk. olsun. Bu takdirde f nin K üzerinde sürekli olması için $\Leftrightarrow$ f nin K üzerinde düzgün sürekli olmasıdır.

İspat. f fonk.u K kompakt kümesi üzerinde sürekli olsun.

f nın K üzerinde düzgün sürekli olmadığını varsayalım ve bir çelişki oluşturalım.

O zaman bir $\varepsilon_0 > 0$ sayısına karşılık

$$\forall k \in \mathbb{N} \text{ için } \|x_k - y_k\| < 1/k \Rightarrow \|f(x_k) - f(y_k)\| \geq \varepsilon_0 \quad (*)$$

olacak şekilde $x_k, y_k \in K$ noktaları vardır.

Heine-Borel teoremine göre K kompakt kümesi dizisel kompakttır, o halde (x_k) dizisinin $\lim_{j\to\infty} x_{k_j} = x \in K$ olmak üzere bir (x_{k_j}) alt dizisi vardır, yine (y_{k_j}) dizisinin de $\lim_{\ell\to\infty} y_{k_{j_\ell}} = y \in K$ olacak şekilde bir $(y_{k_{j_\ell}})$ alt dizisi vardır.

Bu durumda $\lim_{\ell\to\infty} x_{k_{j_\ell}} = x$ olmalıdır. Böylece $(*)$ gözönüne alınırsa

$$\lim_{\ell\to\infty} \|f(x_{k_{j_\ell}}) - f(y_{k_{j_\ell}})\| = \|f(x) - f(y)\| \geq \varepsilon_0 > 0,$$

yani $f(x) \neq f(y)$ çıkar.

Öte yandan her $k \in \mathbb{N}$ için $\|x_k - y_k\| < 1/k$ olduğundan $\lim_{k\to\infty} \|x_k - y_k\| = \|x - y\| < \lim_{k\to\infty} (1/k) = 0$ olduğu için $x = y$, dolayısıyla $f(x) = f(y)$ dir. Bu aradığımız çelişkidir.

O halde varsayımımız yanlış, dolayısıyla f fonksiyonu K üzerinde düzgün sürekli olmalıdır.

2- $\mathbb{R}^n$ de Diferansiyellenebilme

Yönlü Türev

$f: E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bir fonk., $p=(p_1, p_2, \dots, p_n) \in E$ ve $\vec{v}=(v_1, \dots, v_n)$ bir birim vektör olsun. Eğer varsa,

$$D_{\vec{v}} f(p) = \frac{d}{dt} f(p+t\vec{v})\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{f(p+t\vec{v}) - f(p)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f((p_1+tv_1, \dots, p_n+tv_n)) - f((p_1, \dots, p_n))}{t}$$

limit değerine f fonk.un p noktasındaki $\vec{v}$ yönündeki 'yönlü türevi' denir.

Eğer f nin p noktasındaki $-\vec{v}$ ile $\vec{v}$ vektörleri yönünde yönlü türevleri varsa,

$$D_{-\vec{v}} f(p) = -D_{\vec{v}} f(p)$$

dır. Gerçekten

$$D_{-v} f(p) = \lim_{t\to 0} \frac{f(p+t(-\vec{v})) - f(p)}{t} = \lim_{s\to 0} \frac{f(p+s\vec{v}) - f(p)}{-s} = -D_v f(p)$$

olur.

ÖRNEK. $f(x,y)=x^2y$ fonksiyonun $(1,2)$ noktasındaki ve $\vec{u}=(-3,4)$ vektörü yönündeki yönlü türevini bulalım:

Verilen vektör yönündeki birim vektör $\vec{v}=(\frac{-3}{5},\frac{4}{5})$ olup,

$$D_{\vec{v}}f(1,2)=\frac{d}{dt}f((1,2)+t(-3/5,4/5))\Big|_{t=0}$$

$$=\frac{d}{dt}f((1+t(-3/5), 2+t(4/5))\Big|_{t=0}$$

$$=\frac{d}{dt}\left[(1-3t/5)^2(2+4t/5)\right]\Big|_{t=0}$$

$$=\left[2(-3/5)(1-3t/5)(2+4t/5)+(1-3t/5)^2(4/5)\right](0)$$

$$=-\frac{6}{5}(1)(2)+(1)(4/5)=-8/5$$

bulunur.

Kısmi Türevler

$E=\{x_1\}\times\cdots\times\{x_{j-1}\}\times[a,b]\times\{x_{j+1}\}\times\cdots\times\{x_n\}\subset\mathbb{R}^n$ olmak üzere bir $f:E\to\mathbb{R}$ fonk.unu ele alalım. $t\in[a,b]$ olmak üzere bir $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonk.u da

$$g(t)=f(x_1,\dots,x_{j-1},t,x_{j+1},\dots,x_n)$$

biçiminde tanımlansın. Böyle $x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n$ ler bir reel sabitler olmak üzere bir tek değişkenli ve reel değerli bir fonk. oluşturduk. Eğer bu g fonk.u $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde integrallenebiliyorsa, f nin $[a,b]$ üzerinde x_j değişkenine göre kısmi integrali

$$\int_a^b f(x_1,x_2,\dots,x_n)\,dx_j=\int_a^b g(t)\,dt$$

biçiminde tanımlanır.

Eğer g fonk.u bir $t_0\in(a,b)$ noktasında diferansiyellenebiliyorsa, f nin x_j değişkenine göre $(x_1,\dots,x_{j-1},t_0,x_{j+1},\dots,x_n)$

noktasındaki 1. mertebeden kısmi türevi (kısaca kısmi türevi)

$$f_{x_j}(x_1,\dots,x_{j-1},t_0,x_{j+1},\dots,x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1,\dots,x_{j-1},t_0,x_{j+1},\dots,x_n) = g'(t_0)$$

biçiminde tanımlanır.

Buna göre tek değişkenli fonk.lar için türev tanımı dikkate alınarak, f_{x_i} kısmi türevinin varolması için $\Leftrightarrow$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+he_j)-f(a)}{h}$$

limitinin varolmasıdır. Bu tanıma göre $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$, a noktasında ve e_j standart baz vektörü yönündeki yönlü türevdir.

Burada $a=(x_1,\dots,x_{j-1},t_0,x_{j+1},\dots,x_n)$ ve j. bileşeni 1, diğer bileşenleri 0 olan $e_j=(0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ baz vektörü için $he_j=(0,\dots,0,h,0,\dots,0)$, dolayısıyla

$$a+he_j=(x_1,\dots,x_{j-1},t_0+h,x_{j+1},\dots,x_n)$$

ve

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \frac{dg}{dt}(t_0) = \lim_{h\to 0}\frac{g(t_0+h)-g(t_0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_1,\dots x_{j-1},t_0+h,x_{j+1},\dots,x_n)-f(x_1,\dots,x_{j-1},t_0,x_{j+1},\dots,x_n)}{h}$$

yazılabileceğine dikkat ediniz.

UZEM

Fırsatlar Sunar

Analiz IV Ders Notları

Analiz IV Ders Notları

Analiz IV Ders Notları

Prof. Dr. Cenap DUYAR