Fırsatlar Sunar

Analiz IV Ders Notları

ÖRNEK. $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2/(x^2+y^2)$ fonk.un $(0,0)$ noktasındaki ardışık limitlerini bulalım:

$$\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

ve

$$\lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0}(0) = 0.$$

$\#$

Bu örneğe göre ardışık limitlerin ne zaman aynı oldukları sorusu akla gelir.

4. Teorem. $I \subset \mathbb{R}$ ve $J \subset \mathbb{R}$ iki açık aralık olsun. Yine $a \in I$ ve $b \in J$ noktaları verilsin.

Her $y_0 \in J$ için $\lim_{x\to a} f(x, y_0)$ ve her $x_0 \in I$ için $\lim_{y\to b} f(x_0, y)$ limitleri ile

$$L := \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$$

limiti varsa, o zaman

$$L = \lim_{x\to a} \lim_{y\to b} f(x,y) = \lim_{y\to b} \lim_{x\to a} f(x,y)$$

olur.

İspat. Her $x \in I$ için $g(x) = \lim_{y \to b} f(x,y)$ olsun. ve $\forall \varepsilon > 0$ verilsin. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ olduğundan

$$\exists \delta > 0 \ni (x,y) \in I \times J \wedge 0 < \|(x,y) - (a,b)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon$$

olur. Ayrıca $x \in I$ ve $0 < |x-a| < \delta/\sqrt{2}$ kabul edilirse, $0 < |y-b| < \delta/\sqrt{2}$ varsayıldığında

$$0 < \|(x,y) - (a,b)\| = \sqrt{|x-a|^2 + |y-b|^2} < \sqrt{(\delta/\sqrt{2})^2 + (\delta/\sqrt{2})^2}$$
$$= \sqrt{(\delta^2/2) + (\delta^2/2)} = \delta$$

olur. Buna göre

$$0 < |x-a| < \delta/\sqrt{2} \text{ ve } 0 < |y-b| < \delta/\sqrt{2} \Rightarrow$$
$$\|g(x) - L\| \le \|g(x) - f(x,y)\| + \|f(x,y) - L\| < \|g(x) - f(x,y)\| + \varepsilon$$

yazılabilir ve bu eşitsizlikte $y \to b$ iken limite geçilirse $|x-a| < \delta/\sqrt{2}$ olacak şekilde her $x \in I$ için $\|g(x) - L\| \le \varepsilon$ bulunur. O halde

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{\cancel{x} \to a}\left(\lim_{y \to b} f(x,y)\right) = \lim_{x \to a} \lim_{y \to b} f(x,y) = L$$

elmalıdır. $L = \lim_{y \to b} \lim_{x \to a} f(x,y)$ olduğunu da benzer şekilde gösterebiliriz.

UYARI: Bu teoreme göre eğer bir f fonk.nun bir (a,b) noktasında ardışık limitleri var ve değerleri farklı ise $\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x,y)$ limiti yoktur.

2- Çok Değişkenli Fonk.larda Süreklilik

Tek değişkenli fonk.lar için bilinen süreklilik tanımını çok değişkenli fonk.lara genişleteceğiz.

TANIM. $E \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere bir $f: E \to \mathbb{R}^m$ fonk.u verilsin.

(1) $a \in E$ olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$'a karşılık

$$\|x - a\| < \delta \wedge x \in E \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ bulunabiliyorsa, f fonk.un "a noktasında sürekli" olduğu söylenir.

(2) $F \subset E$ olsun. Eğer f fonksiyonu her $a \in F$ noktasında sürekli ise, f nin 'F üzerinde sürekli' olduğu söylenir.

(3) Eğer f fonk.u E ~~tanımlı~~ üzerinde sürekli ise, f fonk.u süreklidir, denir.

Bu tanıma göre $f: E \to \mathbb{R}^m$ fonk.un $a \in E$ noktasında sürekli olması

$$\lim_{x \in E,\, x \to a} f(x) = f(a)$$

olmasına denktir.

$f = (f_1, \dots, f_m)$ olmak üzere f_i, $(i = 1, \dots, m)$ bileşen fonk.ları gözönüne alınırsa, f fonk.un a noktasında sürekli olması için $\Leftrightarrow$ f_j bileşen fonk.larının a noktasında sürekli olmasıdır.

Dolayısıyla f fonk.u $A \subset E$ üzerinde sürekli $\Leftrightarrow$ f_j ler

A üzerinde süreklidir, yazabiliriz.

Ayrıca cebirsel işlemler altında limit korunması gözönüne alınarak, eğer f ve g fonk.ları bir noktada ve bir küme üzerinde sürekli ise, $f \pm g$, $f \cdot g$, $\|f\|$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için λf fonk.ları da sürekli olurlar.

Şimdi bileşke fonk.un sürekliliğine değinelim.

5. Teorem. $E \subset \mathbb{R}^n$, $F \subset \mathbb{R}^m$ olmak üzere $f : E \to F$ ve $g : F \to \mathbb{R}^p$ iki fonk. olsun.

Eğer $\lim\limits_{x \in E,\, x \to a} f(x) = L$ ve g fonk.u $L \in F$ noktasında sürekli ise

$$\lim_{x \in E,\, x \to a} (g \circ f)(x) = g\left(\lim_{x \in E,\, x \to a} f(x)\right) = g(L)$$

olur.

İspat. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $x_k \in E \setminus \{a\}$ ve $x_k \to a$ olacak şekilde herhangi bir (x_k) dizisi verilsin.

O zaman $\lim\limits_{x \in E,\, x \to a} f(x) = L$ olmasından $\lim\limits_{k \to \infty} f(x_k) = L$ ve

$\lim_{y \to L} g(y) = g(L)$ (yani g nin L noktasında sürekli olması) olduğundan $\lim_{k\to\infty} g(f(x_k)) = g(L)$ olur. Yani

$$\lim_{k\to\infty} (g\circ f)(x_k) = g\left(\lim_{x\in E,\, x\to a} f(x)\right)$$

dir. Buna göre E üzerinden $x \to a$ iken $(g\circ f)(x) \to g(L)$ olur. #

Bir $f: E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ fonk.un $a\in E$ noktasında sürekliliğinin, kısaca $\forall \varepsilon > 0$'a karşılık $\exists \delta > 0 \ni$

$$f(B(a,\delta)\cap E) \subset B(f(a),\varepsilon) \Leftrightarrow B(a,\delta)\cap E \subset f^{-1}(B(f(a),\varepsilon))$$

kısmında de yazılabileceği açıktır.

Buradan sürekli fonk. ların bir ana özelliğine ulaşılır.

6. Teorem. $E \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere $f: E \to \mathbb{R}^m$ bir fonk. olsun. f nin E üzerinde sürekli olması için $\Leftrightarrow$ her $V \subset \mathbb{R}^m$ açık alt kümesinin $f^{-1}(V)$ ters görüntüsü için $f^{-1}(V)\cap E$ kümesinin göreceli açık olmasıdır.

yani $f^{-1}(V)$ nin $\mathbb{R}^n$ de açık olmasıdır.

İspat. f fonk.u sürekli, $V\subset\mathbb{R}^m$ herhangi bir açık alt küme olsun. $\forall a\in f^{-1}(V)\cap E$ verilsin. O zaman $f(a)\in V$ ve $a\in E$ dir. ~~f fonk.u a noktasında sürekli olduğundan~~, V açık $B(f(a),\varepsilon)\subset V$ olacak şekilde bir $\varepsilon>0$ var, f, a da sürekli olduğu için

$$B(a,\delta_a)\cap E\subset f^{-1}(B(f(a),\varepsilon))\subset f^{-1}(V) \quad (*)$$

olacak şekilde bir $\delta_a>0$ vardır.

Şimdi $U=\bigcup_{a\in f^{-1}(V)} B(a,\delta_a)$ kümesini dikkate alalım. Bu küme açık kümelerin birleşimi olduğundan açıktır. Yine $U\supset f^{-1}(V)$ kapsaması vardır ve $(*)$ gereğince $U\cap E\subset f^{-1}(V)\cap E$ olur. Böylece $f^{-1}(V)\cap E=U\cap E$ elde edilir. Bu ise $f^{-1}(V)\cap E$ kümesinin E içinde göreceli açık olduğunu gösterir.

(17)

Tersine $\forall V \subset \mathbb{R}^m$ açık alt kümesi için $f^{-1}(V) \cap E$ kümesi E de göreceli açık olsun. $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall a \in E$ verilsin. $V = B(f(a), \varepsilon)$ alınırsa, $f^{-1}(V) \cap E$ kümesi E de göreceli açıktır. $a \in f^{-1}(V)$ olduğundan, $E \cap B(a, \delta) \subset f^{-1}(V)$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır.

Buna göre $x \in E \wedge x \in B(a, \delta) \Rightarrow \| f(x) - f(a) \| < \varepsilon$ yazılır, yani f fonksiyonu a noktasında süreklidir.

\#

UYARI: Son teorem açık küme olmanın sürekli fonksiyonların ters görüntüleri altında korunduğunu belirtir.

Aynı şekilde kapalı küme olmanın sürekli fonksiyonlar altında korunduğu gösterilebilir.

UZEM

Fırsatlar Sunar

Analiz IV Ders Notları

Analiz IV Ders Notları

Analiz IV Ders Notları

Prof. Dr. Cenap DUYAR