Fırsatlar Sunar

Analiz IV Ders Notları

1- Çok Değişkenli Fonk.ların Limiti ve Özellikleri

Bir $E \subset \mathbb{R}^n$ için $f: E \to \mathbb{R}^m$ fonk.u E nin her bir elemanına $\mathbb{R}^m$ nin bir tek elemanını eşleyen bir bağıntıdır.

E, f nin tanım kümesi diye adlandırılır ve $D(f)$ ile gösterilir. $x \in D(f)$ e.ü tek türlü belirli $y = f(x)$ elemanına da, f nin x noktasındaki ölçeri denir.

Her $x \in D(f)$ için $f(x) \in \mathbb{R}^m$ olduğuna göre

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$$

o.ş. $f_j : D(f) \to \mathbb{R}$, $(j = 1, \ldots, m)$ fonk.ları vardır.

Bunlara f nin 'bileşen fonk.ları' denir.

ÖRNEK. $f(x,y)=\left(\sqrt{1-x^2},\ \ln(x^2-y^2),\ \sin x\cos y\right)$ fonksiyonu için $f_1(x,y)=\sqrt{1-x^2}$, $f_2(x,y)=\ln(x^2-y^2)$ ve $f_3(x,y)=\sin x\cos y$ dir.

$$D(f_1)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1-x^2\geq 0\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\geq x^2\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\geq|x|\}$$
$$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -1\leq x\leq 1\},$$
$$D(f_2)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2-y^2>0\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2>y^2\}$$
$$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|>|y|\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -|x|<y<|x|\},$$
$$D(f_3)=\mathbb{R}^2.$$
$$D(f)=D(f_1)\cap D(f_2)\cap D(f_3)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -1\leq x\leq 1 \text{ ve } -|x|<y<|x|\}$$

\#

Tek değişkenli fonk.lar için limit tanımı $|\cdot|$ yerine $\|\cdot\|$ kullanılarak çok değişkenli fonk.lara genelleştirilebilir.

TANIM. $E \subset \mathbb{R}^n$ ve $a \in E'$ olsun. Ayrıca bir $f : E \to \mathbb{R}^m$ fonk.u ve bir $L \in \mathbb{R}^m$ verilsin. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $0 < \|x - a\| < \delta$ koşulunu sağlayan her $x \in E$ için $\|f(x) - L\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa, 'x noktası E üzerinden a noktasına yaklaştığında f fonk.u L noktasına yakınsar' denir ve 'E üzerinden $x \to a$ iken $f(x) \to L$' ya da

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in E}} f(x) = L$$

yazarak belirtilir.

UYARI. (1) $f(a)$ değeri varsa, bu değer $\lim_{x \to a} f(x)$ değerinin var olup olmamasını etkilemez.

(2) $\lim_{x\to a} f(x)$ değeri varsa, tektir.

(3) Eğer $\lim_{\substack{x\to a\\ x\in E}} f(x)$ varsa, $a\in F'$ olan her F kümesi üzerinden de var ve $\lim_{\substack{x\to a\\ x\in E}} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x\in F}} f(x)$ tir.

(4) Çok değişkenli bir f fonksiyonunun limitinin varlığını göstermek için $\|f(x)-L\| \leq g(x)$ ve $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ olacak şekilde negatif olmayan reel değerli bir g fonk.u bulmak kolaylık sağlar.

ÖRNEK. $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ fonk.u verilsin.

Her $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ için $(|x|-|y|)^2 = x^2+y^2-2|x||y| \geq 0$; yani $x^2+y^2 \geq 2|xy|$ olduğundan, her $(x,y)\neq(0,0)$ için

$$|f(x,y)| = \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x||xy|}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}|x|$$

olur. O zaman $\forall\varepsilon>0$ için $\delta = 2\varepsilon$ seçilirse $0<\|(x,y)-(0,0)\|<\delta$ olduğunda

$$|f(x,y)-0| \le \frac{1}{2}|x| \le \frac{1}{2}\|(x,y)\| < \frac{1}{2}\cdot\delta = \varepsilon$$

çıkər. Bunə göre $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ bulunur.

UYARI. Limit tənımı gereğince $\lim_{x\to a} f(x)=L$ olməsı x noktəsı a noktəsınə yeterince yəkın olduğundə $\|f(x)-L\|$ değerinin istenildiği kədər küçük yəpıləbileceğini söylenir.

O həlde x noktələrı a noktəsınə hangi yoldən yəkləşırsa yəkləşsın L limiti deperi aynı kəlməlıdır.

Bu gözlem limitin vər olmədığını göstermek için bir yöntem verir. Bunə göre x noktələrının a yə fərklı yollərdən yəkləşılməsı həlinde, fərklı limit deperlerine ulaşməyı səğlərsə, fonkıun a noktəsındəki limitinin vər olmədığını söyler.

ÖRNEK. $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ fonkıu verilmiş olsun.

(6)

$(0,0)$ noktasına $x=0$ doğrusu (y-ekseni) üzerinden yaklaşılırsa, her $y \neq 0$ için $f(0,y)=0$ olacağından L limit değeri $L=0$ olurdu, ama $(0,0)$ noktasına $y=x$ doğrusu üzerinden yaklaşıldığında her $x \neq 0$ için $f(x,x)=\frac{x^2}{x^2+x^2}=1/2$ olacağından $L=1/2$ olurdu. Buna göre $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ limiti yoktur.

1. Teorem. $E \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere $f: E \to \mathbb{R}^m$ bir fonk. ve $a \in E'$ olsun. Bu takdirde $L := \lim\limits_{x\in E,\, x\to a} f(x)$ vardır $\Leftrightarrow$ her $k \in \mathbb{N}$ için $x_k \in E\setminus\{a\}$ olmak üzere $x_k \to a$ koşulunu sağlayan her (x_k) dizisi için $f(x_k) \to L$ dir.

İspat. $\lim\limits_{x\in E,\, x\to a} f(x) = L$ olsun. O zaman

$$\forall \varepsilon>0 \text{ için } \exists \delta>0 \ni x\in E \wedge 0<\|x-a\|<\delta \Rightarrow \|f(x)-L\|<\varepsilon$$

yazılır. Öte yandan her $k \in \mathbb{N}$ için $x_k \in E\setminus\{a\}$ olmak üzere $x_k \to a$ ise

$$\exists N \in \mathbb{N} \ni \forall k \geq N \text{ için } 0 < \|x_k - a\| < \delta$$

yazılır ve buna göre $\forall k \geq N$ için $\|f(x_k) - L\| < \varepsilon$ bulunur. Bu $k \to \infty$ iken $f(x_k) \to L$ olduğunu gösterir.

Tersine her $k \in \mathbb{N}$ için $x_k \in E \setminus \{a\}$ ve $x_k \to a$ olan her (x_k) dizisi için $f(x_k) \to L$ olsun. $\lim\limits_{x \in E, x \to a} f(x) \neq L$ varsayalım. O zaman bir $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $\delta > 0$ için $x \in E$ ve $0 \leq \|x - a\| < \delta$ ise $\|f(x) - L\| \geq \varepsilon$ olacak şekilde bir x elemanı vardır. Buna göre her $k \in \mathbb{N}$ için $0 < \|x_k - a\| < \frac{1}{k}$ ise $\|f(x_k) - L\| \geq \varepsilon$ olacak şekilde bir $x_k \in E$ bulunur. Öte yandan her $k \in \mathbb{N}$ için

$$0 < \|x_k - a\| < \frac{1}{k} \Rightarrow \lim_{k \to \infty} \|x_k - a\| = 0 \Rightarrow x_k \to a$$

olur, ama $\|f(x_k) - L\| \geq \varepsilon \Rightarrow f(x_k) \not\to L$ dir. Bu kabulümüzle çelişir. #

2. Teorem. $E \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere $f = (f_1, \ldots, f_m): E \to \mathbb{R}^m$ bir fonksiyon, $a \in E'$ ve $L = (L_1, L_2, \ldots, L_m) \in \mathbb{R}^m$ olsun. Bu takdirde

$$L = \lim_{x\in E,\, x\to a} f(x) \iff \forall j = 1, 2, \ldots, m \text{ için } L_j = \lim_{x\in E,\, x\to a} f_j(x)$$

olur.

İspat. $\lim_{x\in E,\, x\to a} f(x) = L$ olsun ve $\forall \varepsilon > 0$ verilsin. O zaman

$$\exists \delta > 0 \ni 0 < \|x - a\| < \delta \wedge x \in E \Rightarrow \|f(x) - L\|$$

$$= \|(f_1(x), \ldots, f_m(x)) - (L_1, \ldots, L_m)\| = \sqrt{(f_1(x) - L_1)^2 + \cdots + (f_m(x) - L_m)^2} < \varepsilon$$

ve dolayısıyla her $j = 1, \ldots, m$ için $|f_j(x) - L_j| < \varepsilon$ olur. Buna göre her $j = 1, \ldots, m$ için $\lim_{x\in E,\, x\to a} f_j(x) = L_j$ dir.

Tersine $\forall j = 1, \ldots, m$ için $L_j = \lim_{x\in E,\, x\to a} f_j(x)$ olsun ve $\forall \varepsilon > 0$ verilsin. O zaman her $j = 1, \ldots, m$ için

$$\exists \delta_j > 0 \ni x \in E \wedge 0 < \|x - a\| < \delta_j \Rightarrow |f_j(x) - L_j| < \varepsilon/m$$

yazılır. Bu durumda $\delta := \min\{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$ seçilirse,

$$0 < \|x - a\| < \delta \wedge x \in E \Rightarrow \|f(x) - L\| = \sqrt{(f_1(x) - L_1)^2 + \cdots + (f_m(x) - L_j)^2}$$

$$\le |f_1(x) - L_1| + \cdots + |f_m(x) - L_m| < m(\varepsilon/m) = \varepsilon$$

olur. Bu $\lim_{x\in E,\, x\to a} f(x) = L$ olduğunu gösterir.

(9)

· Tek değişkenli fonk.lara benzer olarak çok değişkenli fonk.lar için cebirsel işlemler tanımlanabilir.

$E \subset \mathbb{R}^n$ ve $f: E \to \mathbb{R}^m$, $g: E \to \mathbb{R}^m$ iki fonk. olsun.

Toplam ve fark: $\forall x \in E$ için
$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x).$$

· Çarpım: $\forall x \in E$ için
$$(f.g)(x) = f(x).g(x).$$

Skalerle çarpma: $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$ için
$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

İç-çarpım: $\forall x \in E$ için
$$\langle f, g \rangle (x) = \langle f(x), g(x) \rangle \left((f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \right).$$

Bölüm: $m=1$ ve $x \in E$ için $g(x) \neq 0$ olmak üzere
$$(f/g)(x) = f(x)/g(x).$$

3. Teorem. $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in E'$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $f: E \to \mathbb{R}^m$, $g: E \to \mathbb{R}^m$ olsun. Eğer $\lim\limits_{x \in E, x \to a} f(x) = L$ ve $\lim\limits_{x \in E, x \to a} g(x) = M$ limitleri varsa,

(10)

(1) $\lim\limits_{x\in E, x\to a}(f+g)(x) = \lim\limits_{x\in E, x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\in E, x\to a} g(x)$,

(2) $\lim\limits_{x\in E, x\in a}(\alpha f)(x) = \alpha \lim\limits_{x\in E, x\to a} f(x)$,

(3) $\lim\limits_{x\in E, x\to a}(f\cdot g)(x) = \left(\lim\limits_{x\in E, x\to a} f(x)\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\in E, x\to a} g(x)\right)$;

(4) $\left\|\lim\limits_{x\in E, x\to a} f(x)\right\| = \lim\limits_{x\in E, x\to a}\|f(x)\|$,

(5) $m=1$ ise $\lim\limits_{x\in E, x\to a} g(x)\neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\in E, x\to a}\left(f(x)/g(x)\right) = \left(\lim\limits_{x\in E, x\to a} f(x)\right)\Big/\left(\lim\limits_{x\in E, x\to a} g(x)\right)$.

özellikleri gerçekleşir.

İspat. $\forall k\in\mathbb{N}$ için $x_k\in E\setminus\{a\}$ olmak üzere $x_k\to a$ koşulunu sağlayan herhangi bir (x_k) dizisi verilsin. O zaman

$$\lim_{k\to\infty}(f\cdot g)(x_k) = \lim_{k\to\infty}[f(x_k)\cdot g(x_k)] = \lim_{k\to\infty}[(f_1(x_k),\dots,f_m(x_k))\cdot(g_1(x_k),\dots,g_m(x_k))]$$

$$= \lim_{k\to\infty}[f_1(x_k)g_1(x) + \dots + f_m(x_k)\cdot g_m(x_k)]$$

$$= \lim_{k\to\infty} f_1(x_k)g_1(x_k) + \dots + \lim_{k\to\infty} f_m(x_k)g_m(x_k) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} f_1(x_k)\lim_{k\to\infty} g_1(x_k) + \dots + \lim_{k\to\infty} f_m(x_k)\lim_{k\to\infty} g_m(x_k) =$$

(1)

$$=(L_1 \cdot M_1 + \dots + L_m M_m) = (L_1, L_2, \dots, L_m(a)) \cdot (M_1, \dots, M_m)$$
$$= L(a) M(a)$$

olduğundan (3) ispətlənmış olur.

Benzer şekilde diğer özellikler ispətlənəbilir.

TANIM. $E \subset \mathbb{R}^2$, $f: E \to \mathbb{R}^m$ bir fonk. ve $(a,b) \in E'$ olsun. f fonksiyonunun (a,b) noktəsındaki ərdışık limitleri, sözü edilen limitler vərsə

$$\lim_{x \to a} \lim_{y \to b} f(x,y) := \lim_{x \to a} \left(\lim_{y \to b} f(x,y) \right)$$

ve

$$\lim_{y \to b} \lim_{x \to a} f(x,y) = \lim_{y \to b} \left(\lim_{x \to a} f(x,y) \right)$$

biçiminde tənımlənır.

Bir fonk.ın bir noktədəki ərdışık limitleri vər olsə bile bu noktədəki limiti vər olmayəbilir. Ardışık limitler fərklı değerlerde ələbilirler.

Analiz IV Ders Notları

Analiz IV Ders Notları

Analiz IV Ders Notları

Prof. Dr. Cenap DUYAR