



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



1

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

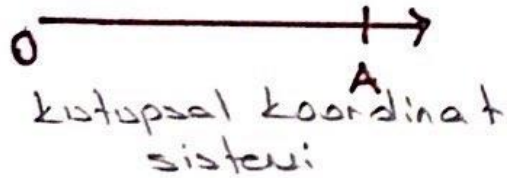
Analitik Geometri I

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 5

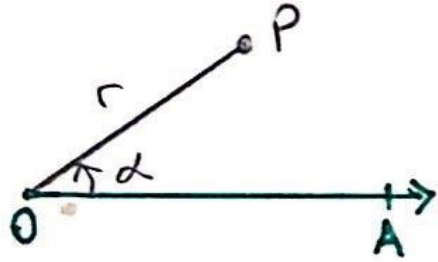
Düzlemde Kutupsal Koordinat Sistemi

Düzlemde Kartezyen ve eğik koordinat sistemi dışında kutupsal koordinat sistemi de kullanılır. Bu sistem bazı problemlerin çözümünü oldukça kolaylaştırır. Sistemin esası, sabit bir O noktası ve bu noktadan geçen bir $\{OA\}$ ışınının ibarettir. Mecburi olarakla birlikte ışın, π eksenini gibi yatay çizilir.



O ya kutup noktası, ışına da kutup eksenini denir.

Kutupsal Koordinat Sisteminde Bir Noktanın Koordinatlarının Bulunması



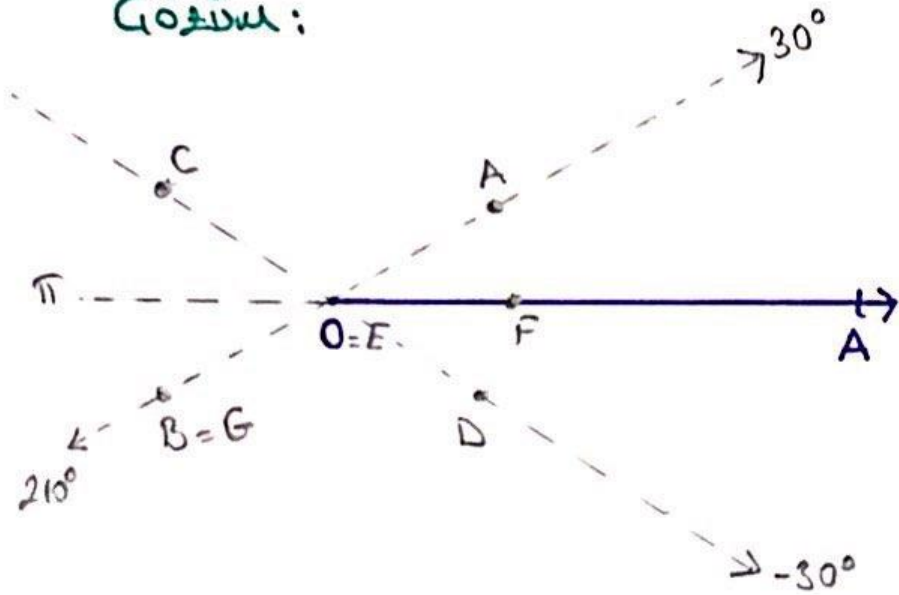
Düzlemin bir P noktası verildiğinde, $\|OP\|=r$ ve \widehat{AOP} pozitif yönlü açısının ölçüsü α olarak üzere (r, α) ikilisine P nin kutupsal koordinatları denir.

Tersine, (r, α) ikilisi verildiğinde buna karşılık gelen P noktası şu şekilde bulunur: (OA) ısnı eğer $\alpha > 0$ ise pozitif yönde, $\alpha < 0$ ise negatif yönde $|\alpha|$ kadar döndürülür. O dan itibaren eğer $r > 0$ ise ısn yönünde, $r < 0$ ise ısnın ters yönünde $|r|$ kadar ilerlerir. Geline nokta, (r, α) ikilisine karşılık gelen noktadır.

Örnek: Düzlemde bir kutupsal koordinat sistemi tanımlayarak aşağıdaki noktaların bu sistemdeki yerlerini belirleyiniz.

$$A(2, 30^\circ), B(-2, 30^\circ), C(-2, -30^\circ), D(2, -30^\circ), E(0, 30^\circ), \\ F(-2, \pi), G(2, 210^\circ)$$

Gözüm:



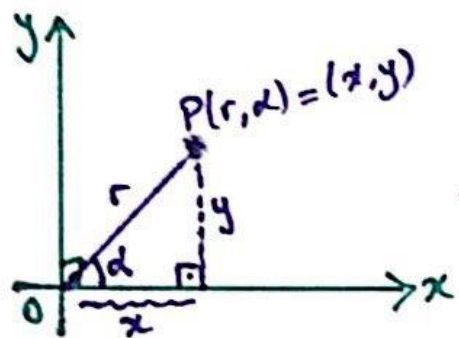
Sonuç:

$$1) (r, \alpha) = (r, \alpha + 2k\pi)$$

$$2) (r, \alpha) = (-r, \pi + \alpha)$$

3) $\forall \alpha$ için $(0, \alpha)$, orijinin kutupsal koordinatlarıdır.

Kutupsal Koordinatlar ile Kartezyen Koordinatlar Arasındaki Bağlılıklar



Düzlemde xoy dik koordinat sistemi verilsin. O noktası kutup noktası ve x ekseninde kutup eksenini olarak düşünülebilir. Böylece Kartezyen koordinat sistemi ile kutupsal koordinat sistemi iç içe ifade edilmiş olur.

Düzlemin bir P noktasının kutupsal koordinatları (r, α) , Kartezyen koordinatları da (x, y) olsun.

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{x}{r} \Rightarrow \begin{cases} x = r \cos \alpha \\ y = r \sin \alpha \end{cases} \\ \sin \alpha &= \frac{y}{r} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} &= \tan \alpha \Rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ x^2 + y^2 &= r^2 \Rightarrow r = \pm \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Örnek: Kutupsal koordinatlarda verilen $A(3, 30^\circ)$ noktasının kartesiyen koordinatlarını bulunuz.

Çözüm:

$$r = 3, \alpha = 30^\circ \text{ dir.}$$

$$x = r \cos \alpha = 3 \cdot \cos 30^\circ$$

$$y = r \sin \alpha = 3 \sin 30^\circ$$

$$\Rightarrow x = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad y = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right) \text{ olur.}$$

Örnek: Kartezyen koordinatlarda verilen $A(4, -4\sqrt{3})$ noktasının kutupsal koordinatlarını bulunuz.

Çözüm:

$$x=4, \quad y=-4\sqrt{3} \quad r = \pm\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow r = \pm 8$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan(-\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow \alpha = 120^\circ, 300^\circ$$

$$r = 8 \text{ için } \begin{array}{l} x = r \cos \alpha \\ y = r \sin \alpha \end{array} \Rightarrow \cos \alpha > 0, \sin \alpha < 0 \Rightarrow \alpha = 300^\circ$$

olur. Benzer şekilde $r = -8$ için $\alpha = 120^\circ$ olur.

$$\Rightarrow A(8, 300^\circ) = (-8, 120^\circ) \text{ olur.}$$

Not: Kartezyen koordinatlarda verilen bir geometrik yer denkleminde $x = r \cos \alpha$, $y = r \sin \alpha$ yazılırsa geometrik yerin kutupsal koordinatlardaki denklemini elde edilir.

Örnek:

$a, b, c \in \mathbb{R}$ için $ax + by + c = 0$ doğrusunun kutupsal koordinatlardaki denklemini bulalım:

$$a(r \cos \alpha) + b(r \sin \alpha) + c = 0$$

$$\Rightarrow r(a \cos \alpha + b \sin \alpha) + c = 0$$

Örnek:

$x^2 + y^2 = a^2$ çemberinin kutupsal koordinatlardaki denklemini bulalım:

$$(r \cos \alpha)^2 + (r \sin \alpha)^2 = a^2$$

$$\Rightarrow r = a \text{ veya } r = -a.$$

Örnek: Aşağıda kutupsal koordinatları verilen noktaları düzlemde gösteriniz, Kartezyen koordinatlarını bulunuz.

$$A(2, 150^\circ), B(-2, 45^\circ), C(-3, 210^\circ)$$

Örnek: Aşağıda Kartezyen koordinatları verilen noktaların kutupsal koordinatlarını bulunuz.

$$A(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}), B(1, -\sqrt{3}), C(2\sqrt{3}, 2), D(0, 4), E(-3, 0), F(-\pi, \pi)$$

Örnek: $A(r_1, \theta_1)$, $B(r_2, \theta_2)$ kutupsal koordinatları ile verilen iki nokta arasındaki uzaklığın

$$d(A, B) = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

olduğunu gösteriniz.

Gözümler:

A ve B'nin kartesiyen koordinatları $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ olsun.

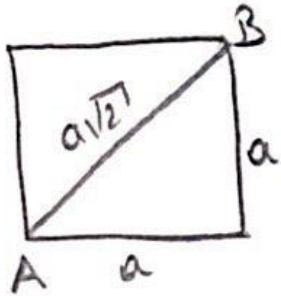
$\Rightarrow x_1 = r_1 \cos \theta_1$, $y_1 = r_1 \sin \theta_1$, $x_2 = r_2 \cos \theta_2$, $y_2 = r_2 \sin \theta_2$ dir.

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 + y_1^2 + y_2^2 - 2y_1 y_2} \\ &= \sqrt{\underline{r_1^2 \cos^2 \theta_1} + \underline{r_2^2 \cos^2 \theta_2} - 2r_1 r_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \underline{r_1^2 \sin^2 \theta_1} + \underline{r_2^2 \sin^2 \theta_2} - 2r_1 r_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2} \\ &= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)} \end{aligned}$$

Örnek: Karşılıklı közelerinin kutupsal koordinatları

$A(12, -\pi/10)$, $B(3, \pi/15)$ olan karenin alanını hesaplayınız.

Çözüm:



Formülden,

$$d(A,B) = 3\sqrt{17-4\sqrt{3}} \text{ bulunur.}$$

$$a\sqrt{2} = 3\sqrt{17-4\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow 2a^2 = 9(17-4\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{9}{2}(17-4\sqrt{3})$$



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

Analitik geometri

Ders 5