



**UZEM** | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ  
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



1

**Ondokuz Mayıs Üniversitesi**  
**Fen Edebiyat Fakültesi**  
**Matematik Bölümü**  
**Dijital Ders Platformu**

Diferansiyel Denklemler II

Dr. Öğretim Üyesi Fatma HRA

Ders 12

## Uygulama -4-

①  $x^3 y''' - x^2(x+3)y'' + 2x(x+3)y' - 2(x+3)y = 0$  denklemini verilsin.

Ⓐ Bu denklemin  $x^m, m \in \mathbb{Z}$  formunda iki lineer bağımsız çözüme sahip olduğunu gösteriniz. Ⓑ Bulunan çözümler yardımıyla denklemin mertebesini düşürünüz. Ⓒ Genel çözümlerini bulunuz.

Ⓐ  $y = x^m, m \in \mathbb{Z}$  çözüm ise

$$y' = mx^{m-1}, y'' = m(m-1)x^{m-2}, y''' = m(m-1)(m-2)x^{m-3} \text{ için}$$

$$\begin{cases} m(m-1)(m-2) - (x+3)m(m-1) + 2(x+3)m - 2(x+3) \end{cases} x^m = 0$$

$$(m-1)(m-2)(m-3-x)x^m = 0$$

$\Rightarrow m=1, m=2$  için  $y_1 = x, y_2 = x^2$  iki lineer bağımsız çözümdür.

Ⓑ  $y_1 = x$  için  $y = y_1 u = xu$  dönüşümü yapılırsa

$$y' = u + xu', y'' = 2u' + xu'', y''' = 3u'' + xu'''$$

olup denklem

$$x^3(2u'' + xu''') - x^2(x+3)(2u' + xu'') + 2x(x+3)(u + xu') - 2(x+3)xu = 0$$

$$\Rightarrow x^4 u''' - x^4 u'' = 0$$

$$\Rightarrow u''' - u'' = 0$$

haline gelir. Burada  $u'' = v$ ,  $u''' = v'$  denirse bu denklemde

$$v' - v = 0$$

şeklinde birinci mertebeden denkleme indirgenir.

$$\textcircled{e} v' - v = 0 \Rightarrow v' = v \Rightarrow \frac{dv}{v} = dx \Rightarrow \ln v = x + c$$

$$\Rightarrow v = c_1 e^x \text{ dur.}$$

$$u'' = v \Rightarrow u'' = c_1 e^x$$

$$\Rightarrow u' = c_1 e^x + c_2$$

$$\Rightarrow u = c_1 e^x + c_2 x + c_3 \text{ dur.}$$

$y = xu$  olduğundan

$$y = c_1 x e^x + c_2 x^2 + c_3 x \text{ genel çözümdür.}$$

②  $x^3 y''' + xy' - y = 0$  denkleminin gözünü bulunuz.

Denklem Cauchy-Euler denklemi olduğundan  $x = e^t, x > 0$  dönüşümü yapılırsa

$$xy' = D_t y$$

$$x^3 y''' = D_t (D_t - 1) (D_t - 2) y \quad \text{olacağından denklem}$$

$$(D_t (D_t - 1) (D_t - 2) + D_t - 1) y = 0 \Rightarrow (D_t^3 - 3D_t^2 + 3D_t - 1) y = 0$$

şeklinde sabit katsayılı denkleme indirgenir

$$(D_t^3 - 3D_t^2 + 3D_t - 1) y = 0$$

$$\Rightarrow (D_t - 1)^3 y = 0$$

$$l(\lambda) = (\lambda - 1)^3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \text{ için}$$

$$y = y_h = (c_1 + c_2 t + c_3 t^2) e^t$$

$$y = (c_1 + c_2 \ln x + c_3 \ln^2 x) x \quad \text{genel çözümdür.}$$

③  $(1-x^2)y'' - xy' = 2$  denkleminin çözümünü bulunuz

Denklemden  $y$  bağımlı değişkeni olmadığı için

$y' = u$ ,  $y'' = u'$  dönüşümü ile merteye düşürülebilir

$$(1-x^2)u' - xu = 2 \Rightarrow u' - \frac{x}{1-x^2}u = \frac{2}{1-x^2} \quad \text{birinci}$$

merkezenli lineer denklem dur.

$$\lambda(x) = e^{\int \frac{-x}{1-x^2} dx} = e^{\frac{1}{2} \ln(1-x^2)} = \sqrt{1-x^2} \quad \text{isim lineer denklemin}$$

genel çözümü

$$\sqrt{1-x^2} \cdot u = \int \frac{2}{1-x^2} \cdot \sqrt{1-x^2} dx + C_1$$

$$\sqrt{1-x^2} u = 2 \cdot \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + C_1$$

$$\sqrt{1-x^2} u = 2 \arcsin x + C_1 \Rightarrow u = (1-x^2)^{-1/2} (2 \arcsin x + C_1)$$

bulunur.

$$y' = u = (1-x^2)^{-1/2} (2\arcsin x + c_1)$$

$$\Rightarrow y = 2 \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx + c_1 \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + c_2$$

$$\Rightarrow y = (\arcsin x)^2 + c_1 \arcsin x + c_2$$

teklide çözümü bulunur.

④  $(1-x^2)y'' + 2xy' - 2y = 6(1-x^2)^2$  denkleminin homojen kısmının ikinci dereceden polinomlar şeklindeki çözümlerini bularak genel çözümlerini bulunuz.

$$y_h = ax^2 + bx + c \text{ şeklinde ise buradan}$$

$$y_h' = 2ax + b, \quad y_h'' = 2a \text{ için}$$

$$(1-x^2)2a + 2x(2ax+b) - 2(ax^2+bx+c) = 0$$

$$\Rightarrow 2(a-c) = 0 \Rightarrow a = c \text{ olup } b \text{ keyfidir. Böylece}$$

$$y_h = ax^2 + bx + c = a(x^2+1) + bx \text{ olur. Buna göre lineer}$$

bağımsız çözümler  $y_1 = 1+x^2$ ,  $y_2 = x$  dir. Sabitin değeri yöntemi ile özel çözümler ararsak

$$y_p = v_1(x)(x^2+1) + v_2(x)x \text{ için}$$

$$v_1'(x^2+1) + v_2'x = 0$$

$$v_1' \cdot 2x + v_2' = 6(1-x^2)$$

} denklemler sistemi elde

edilir. Bunun çözümlerinden

$$v_1' = -bx \Rightarrow v_1(x) = -3x^2$$

$$v_2' = b(x^2+1) \Rightarrow v_2(x) = 2x^3 + bx$$

olaragından

$$y'' = -3x^2(x^2+1) + (2x^3+bx)x = -x^4 + 3x^2 \text{ dir.}$$

Genel çözüm

$$y = a(x^2+1) + bx + 3x^2 - x^4$$

$$= a(x^2+1) + bx + 3(x^2+1) - x^4 - 3$$

$$= (a+3)(x^2+1) + bx - x^4 - 3$$

$$= c_1(x^2+1) + c_2x - x^4 - 3$$

fezlinke dir.



5)  $(3x+2)^2 y'' + 3(3x+2)y' - 3by = 3x^2 + 4x + 1$  denklemini çözünüz.

Denklem Legendre denklemini olup  $3x+2 = e^t$  dönüşümü ile sabit katsayılı denkleme indirgenir.

$$(3x+2)y' = 3 D_t y$$

$$(3x+2)y'' = 3^2 D_t (D_t - 1)y \quad \text{olup}$$

$$(9 D_t (D_t - 1) + 3 \cdot 3 D_t - 3b) y = \frac{e^{2t} - 1}{3}$$

$$\begin{aligned} 3x^2 + 4x + 1 \\ = \frac{(3x+2)^2 - 1}{3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (9 D_t^2 - 3b) y = \frac{e^{2t} - 1}{3}$$

$$\Rightarrow (D_t^2 - 4)y = \frac{e^{2t} - 1}{27} \quad \text{sabit katsayılı denkleme eklenir.}$$

Buradan genel çözüm  $y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} + \frac{1}{108} (t e^{2t} + 1)$

$$y = c_1 (3x+2)^2 + c_2 (3x+2)^{-2} + \frac{1}{108} \left\{ (3x+2)^2 \ln(3x+2) + 1 \right\}$$

olarak bulunur.



**UZEM** | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ  
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



**Ondokuz Mayıs Üniversitesi**  
**Fen Edebiyat Fakültesi**  
**Matematik Bölümü**  
**Dijital Ders Platformu**

Teşekkürler

Dr. Öğretim Üyesi Fatma HRA