ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analitik Geometri I

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 4

Vektörel Çarpım

$\mathbb{R}^3$ uzayının standart bazı $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ olmak üzere $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^3$ vektörlerinin vektörel çarpımı $\alpha \times \beta$ veya $\alpha \wedge \beta$ ile gösterilir ve

$$\alpha \times \beta = \sum_{i=1}^{3} \det(\vec{e}_i, \alpha, \beta)\, \vec{e}_i$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \quad \text{ile tanımlanır.}$$

Bu tanıma göre

$\wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dır.

Örnek: $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ için $\vec{e_1} \wedge \vec{e_2} = e_3$, $\vec{e_2} \wedge \vec{e_3} = e_1$, $\vec{e_3} \wedge \vec{e_1} = e_2$ dir.

Vektörel Çarpımın Özellikleri

1) $\forall \alpha \in \mathbb{R}^3$ için $\alpha \wedge \alpha = \vec{0}$ dır.

$$\alpha \wedge \alpha = \sum_{i=1}^{3} \det(\vec{e_i}, \alpha, \alpha)\,\vec{e_i} = 0$$

2) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^3$ için $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$ dır.

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{i=1}^{3} \det(\vec{e_i}, \alpha, \beta)\,\vec{e_i} = -\sum_{i=1}^{3} \det(\vec{e_i}, \beta, \alpha)\,\vec{e_i} = -\beta \wedge \alpha$$

3) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^3$ için $(\alpha + \beta) \wedge \gamma = (\alpha \wedge \gamma) + (\beta \wedge \gamma)$ dır.

$$(\alpha + \beta) \wedge \gamma = \sum_{i=1}^{3} \det(\vec{e_i}, \alpha + \beta, \gamma)\,\vec{e_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \det(\vec{e_i}, \alpha, \gamma)\,\vec{e_i} + \sum_{i=1}^{3} \det(\vec{e_i}, \beta, \gamma)\,\vec{e_i}$$

$$= (\alpha \wedge \gamma) + (\beta \wedge \gamma)$$

4) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^3$ için $\alpha \wedge (\beta + \gamma) = (\alpha \wedge \beta) + (\alpha \wedge \gamma)$ dır.

5) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^3$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda \alpha \wedge \beta = \lambda(\alpha \wedge \beta) = \alpha \wedge (\lambda \beta)$ dır.

$$\lambda \alpha \wedge \beta = \sum_{i=1}^{3} \det(\vec{e_i}, \lambda\alpha, \beta)\,\vec{e_i}$$

$$= \underbrace{\lambda \sum_{i=1}^{3} \det(\vec{e_i}, \alpha, \beta)\,\vec{e_i}}_{\lambda(\alpha \wedge \beta)}$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{3} \det(\vec{e_i}, \alpha, \lambda\beta)\,\vec{e_i}}_{\alpha \wedge (\lambda\beta)}$$

6) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^3$ için α ile β lineer bağımlı ise $\alpha \wedge \beta = \vec{0}$ dır.

α ile β lineer bağımlı ise $\alpha = \lambda\beta$ dır.

7) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^3$ için $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \neq (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$ dır.

$\alpha = (1,0,1)$, $\beta = (1,0,0)$, $\gamma = (1,1,0)$ alınıp eşitliğin sağlanmadığı görülebilir.

8) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^3$ için $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \langle \alpha, \gamma \rangle \beta - \langle \beta, \gamma \rangle \alpha$ dır.

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ alalım.

$$\alpha \wedge \beta = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2, \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3, \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)$$

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 & \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 & \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha_3\beta_1\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_3 - \alpha_1\beta_2\gamma_2 + \alpha_2\beta_1\gamma_2, \alpha_1\beta_2\gamma_1 - \alpha_2\beta_1\gamma_1 - \alpha_2\beta_3\gamma_3 + \alpha_3\beta_2\gamma_3,$$
$$\alpha_2\beta_3\gamma_2 - \alpha_3\beta_2\gamma_2 - \alpha_3\beta_1\gamma_1 + \alpha_1\beta_3\gamma_1) \ldots (1)$$

$$\langle \alpha, \gamma \rangle \beta - \langle \beta, \gamma \rangle \alpha = (\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3)(\beta_1, \beta_2, \beta_3) - (\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3)(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

$$= (\cancel{\alpha_1\beta_1\gamma_1} + \alpha_2\beta_1\gamma_2 + \alpha_3\beta_1\gamma_3 - \cancel{\alpha_1\beta_1\gamma_1} - \alpha_1\beta_2\gamma_2 - \alpha_1\beta_3\gamma_3,$$
$$\alpha_1\beta_2\gamma_1 + \cancel{\alpha_2\beta_2\gamma_2} + \alpha_3\beta_2\gamma_3 - \alpha_2\beta_1\gamma_1 - \cancel{\alpha_2\beta_2\gamma_2} - \alpha_2\beta_3\gamma_3,$$
$$\alpha_1\beta_3\gamma_1 + \alpha_2\beta_3\gamma_2 + \cancel{\alpha_3\beta_3\gamma_3} - \alpha_3\beta_1\gamma_1 - \alpha_3\beta_2\gamma_2 - \cancel{\alpha_3\beta_3\gamma_3}) \; 2$$

$$\Rightarrow \langle \alpha, \gamma \rangle \beta - \langle \beta, \gamma \rangle \alpha = \big(\alpha_3 \beta_1 \gamma_3 - \alpha_1 \beta_3 \gamma_3 - \alpha_1 \beta_2 \gamma_2 + \alpha_2 \beta_1 \gamma_2 ,$$
$$\alpha_1 \beta_2 \gamma_1 - \alpha_2 \beta_1 \gamma_1 - \alpha_2 \beta_3 \gamma_3 + \alpha_3 \beta_2 \gamma_3 ,$$
$$\alpha_2 \beta_3 \gamma_2 - \alpha_3 \beta_2 \gamma_2 - \alpha_3 \beta_1 \gamma_1 + \alpha_1 \beta_3 \gamma_1 \big) \cdots (2)$$

(1) ve (2) den,

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \langle \alpha, \gamma \rangle \beta - \langle \beta, \gamma \rangle \alpha$$ olur.

Karma Çarpım

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^3$ vektörlerinin karma çarpımı $\langle \alpha \wedge \beta, \gamma \rangle$ ile gösterilir.

$\langle \alpha \wedge \beta, \gamma \rangle = \det(\alpha, \beta, \gamma)$ dır.

(ispatı kolaylıkla yapılabilir)

Özellikleri

1) $\langle \alpha \wedge \beta, \alpha \rangle = 0$ ve $\langle \alpha \wedge \beta, \beta \rangle = 0$ dır.

$$\langle \alpha \wedge \beta, \alpha \rangle = \det(\alpha, \beta, \alpha) = 0$$

Sonuç: iki vektörün vektörel çarpımı bu vektörlerin her ikisine de diktir.

Örnek: $\alpha = (0,1,1) \in \mathbb{R}^3$, $\beta = (2,-1,2) \in \mathbb{R}^3$ vektörlerinin herbirine de dik olan bir vektör bulunuz.

2) $\forall \alpha, \beta, \gamma, \eta \in \mathbb{R}^3$ için $\langle \alpha \wedge \beta, \gamma \wedge \eta \rangle = \langle \alpha, \gamma \rangle \langle \beta, \eta \rangle - \langle \alpha, \eta \rangle \langle \beta, \gamma \rangle$ dır

(Lagrange Özdeşliği)

$$\begin{aligned}
\langle \alpha \wedge \beta, \gamma \wedge \eta \rangle &= \det(\alpha, \beta, \gamma \wedge \eta) \\
&= \det(\gamma \wedge \eta, \alpha, \beta) \\
&= \langle (\gamma \wedge \eta) \wedge \alpha, \beta \rangle \\
&= \langle \langle \gamma, \alpha \rangle \eta - \langle \eta, \alpha \rangle \gamma, \beta \rangle \\
&= \langle \gamma, \alpha \rangle \langle \eta, \beta \rangle - \langle \eta, \alpha \rangle \langle \gamma, \beta \rangle
\end{aligned}$$

Sonuç:

$$\langle \alpha \wedge \beta, \alpha \wedge \beta \rangle = \langle \alpha, \alpha \rangle \langle \beta, \beta \rangle - (\langle \alpha, \beta \rangle)^2$$

Teorem: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^3$ vektörleri arasındaki açı θ olmak üzere,

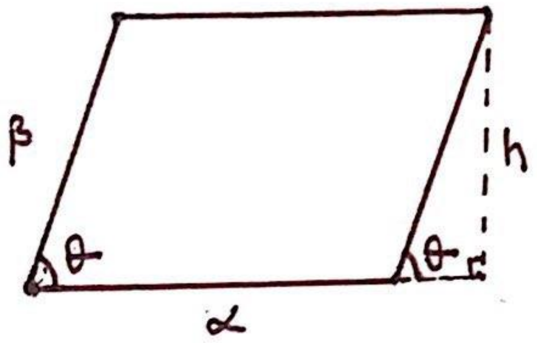
$$\|\alpha \wedge \beta\| = \|\alpha\| . \|\beta\| . \sin\theta \quad \text{dır.}$$

İspat:
$$\|\alpha \wedge \beta\|^2 = \langle \alpha \wedge \beta, \alpha \wedge \beta \rangle$$
$$= \langle \alpha, \alpha \rangle \langle \beta, \beta \rangle - (\langle \alpha, \beta \rangle)^2$$
$$= \|\alpha\|^2 \|\beta\|^2 - \|\alpha\|^2 . \|\beta\|^2 \cos^2\theta$$
$$= \|\alpha\|^2 \|\beta\|^2 \sin^2\theta$$

$$\Rightarrow \|\alpha \wedge \beta\| = \|\alpha\| . \|\beta\| . \sin\theta .$$

Vektörel Çarpımın Geometrik Anlamı

$\mathbb{R}^3$ de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^3$ vektörleri üzerine kurulan paralelkenarın alanı S ise $S = \|\alpha \wedge \beta\|$ dır.

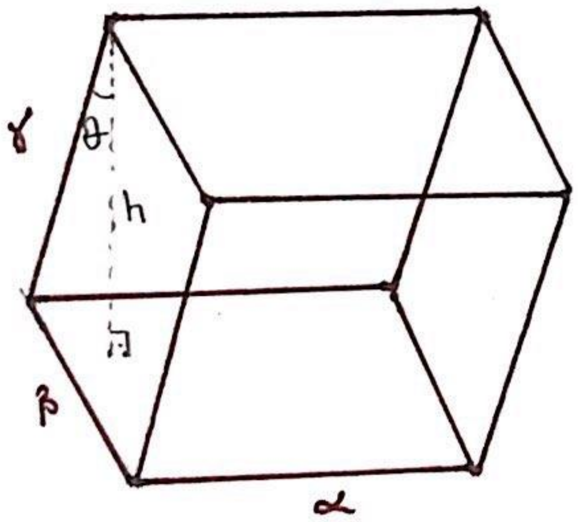


$S = \|\alpha\| . h \quad , \quad \sin\theta = \dfrac{h}{\|\beta\|}$

$\Rightarrow S = \|\alpha\| . \|\beta\| . \sin\theta = \|\alpha \wedge \beta\|$ olur.

Karma Çarpımın Geometrik Anlamı

$\mathbb{R}^3$ de $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^3$ vektörleri üzerine kurulan paralelyüzün hacmi V ise $V = \langle \alpha \wedge \beta, \gamma \rangle = \det(\alpha, \beta, \gamma)$ dır.



$$\langle \alpha \wedge \beta, \gamma \rangle = \|\alpha \wedge \beta\| . \|\gamma\| . \cos\theta$$

$$= \|\alpha \wedge \beta\| . \cancel{\|\gamma\|} . \frac{h}{\cancel{\|\gamma\|}}$$

$$= V$$

Örnek: Aşağıdaki vektör çiftleri üzerine kurulan paralelkenarın alanını hesaplayınız.

a) $\alpha = (2,1,3)$, $\beta = (1,0,2)$ b) $\alpha = (3,4,5)$, $\beta = (2,1,3)$

Örnek: $\|\alpha \wedge \beta\| = \langle \alpha, \beta \rangle \tan\theta$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\|\alpha \wedge \beta\| = \|\alpha\| . \|\beta\| . \sin\theta$

$$= \|\alpha\| . \|\beta\| . \cos\theta . \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \langle \alpha, \beta \rangle \tan\theta$$

Örnek: $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^3$ için

$$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) + \beta \wedge (\gamma \wedge \alpha) + \gamma \wedge (\alpha \wedge \beta) = 0$$

olduğunu gösteriniz (Jacobi Özdeşliği)

Çözüm:

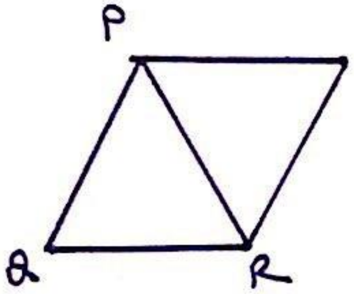
$$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = -(\beta \wedge \gamma) \wedge \alpha = -\langle \beta, \alpha \rangle \gamma + \langle \gamma, \alpha \rangle \beta$$
$$\beta \wedge (\gamma \wedge \alpha) = -(\gamma \wedge \alpha) \wedge \beta = -\langle \gamma, \beta \rangle \alpha + \langle \alpha, \beta \rangle \gamma$$
$$\gamma \wedge (\alpha \wedge \beta) = -(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = -\langle \alpha, \gamma \rangle \beta + \langle \beta, \gamma \rangle \alpha$$

$+$ ―――――――――――――――――

$$\Rightarrow \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) + \beta \wedge (\gamma \wedge \alpha) + \gamma \wedge (\alpha \wedge \beta) = 0$$

Örnek: $P=(1,2,0)$, $Q=(3,0,-3)$, $R=(5,2,6)$ noktaları verilsin. $\overset{\triangle}{PQR}$ üçgeninin alanını bulunuz.

Çözüm:



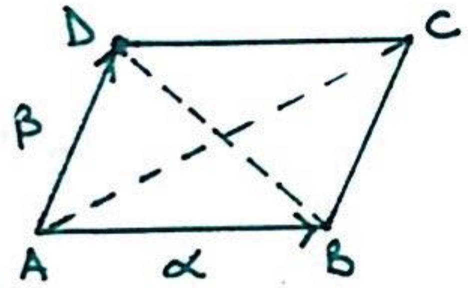
$\overset{\triangle}{PQR}$ nin alanı S olsun.

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} \| PQ \wedge PR \| \text{ dir.}$$

Gerekli hesaplamalardan sonra $S = 14$ bulunur.

Örnek: Vektörel çarpımı kullanarak bir P paralelkenarının köşegenleri üzerine kurulan paralel kenarın alanının P nin alanının iki katı olduğunu gösteriniz.

Çözüm:



P nin alanı $S = \|\alpha \wedge \beta\|$ dır.

$\overrightarrow{AC} = \alpha + \beta$

$\overrightarrow{BD} = \beta - \alpha$ olur.

AC ve BD üzerine kurulan paralel kenarın alanı S_1 ise

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \|(\alpha+\beta) \wedge (\beta-\alpha)\| \\
&= \|\alpha \wedge (\beta-\alpha) + \beta \wedge (\beta-\alpha)\| \\
&= \|\alpha \wedge \beta - \beta \wedge \alpha\| \\
&= \|\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \beta\| \\
&= 2\|\alpha \wedge \beta\| \\
&= 2S
\end{aligned}
$$

Örnek: Aşağıda verilen vektörlerin aynı düzlemde olup olmadığını araştırınız.

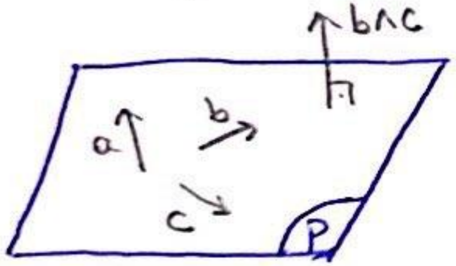
1) $a=(-1,2,2)$, $b=(2,-3,1)$, $c=(-4,7,3)$

2) $a=(3,-2,1)$, $b=(2,1,2)$, $c=(3,-1,-4)$

Çözüm:

$\langle a, b \wedge c \rangle = 0$ ise a, b ve c aynı düzlemdedir.

$\Rightarrow$ $\det(a,b,c)=0$ ise a,b ve c aynı düzlemdedir.



Örnek: $a=(1,1,0)$, $b=(0,1,1)$ vektörlerine dik olan birim vektör bulunuz.

Çözüm:

$$a \wedge b = (1,-1,1) = \alpha \text{ olsun.}$$

$$\|\alpha\| = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{\|\alpha\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \text{ olur.}$$

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

Analitik geometri

Ders 4