ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Cebir 2

İdealler ve Bölüm Halkaları

Prof. Dr. Şenol EREN

Ders 5

Teorem 1.2.17 R değişmeli bir halka ve $\phi \neq A \subset R$ ise

$$(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{s} r_i a_i + \sum_{j=1}^{t} n_j b_j \;\middle|\; r_i \in R,\ n_j \in \mathbb{Z},\ a_i, b_j \in A,\ s, t \in \mathbb{N} \right\} \text{dir.}$$

İspat: $M = \left\{ \sum_{i=1}^{s} r_i a_i + \sum_{j=1}^{t} n_j b_j \;\middle|\; r_i \in R,\ n_j \in \mathbb{Z},\ a_i, b_j \in A,\ s, t \in \mathbb{N} \right\}$

olsun. M kümesinin R'nin A'yı kapsayan bir ideali olduğu kolaylıkla gösterilebilir. (neden?) Şu halde $(A) \subset M$ dir. $\sum_{i=1}^{s} r_i a_i + \sum_{j=1}^{t} n_j b_j \in M$ alalım. $a_i, b_j \in A$ ve

(A) ideal olduğundan $\sum_{i=1}^{s} r_i a_i + \sum_{j=1}^{t} n_j b_j \in (A)$ olup

$M \subset (A)$ bulunur. Dolayısıyla $M = (A)$ dır.

Sonuç 1.2.18 R değişmeli ve birimli bir halka ise
$(A) = \{ \sum_{i=1}^{s} r_i a_i \mid r_i \in R,\ a_i \in A,\ s \in \mathbb{N},\ 1 \leq i \leq s \}$ dir.

İspat: R birimli olduğundan $n \in \mathbb{Z}$, $a \in A$ için
$na = n.(1_R a) = (n.1_R)a$ ve $n.1_R = r \in R$ olduğundan
Teorem 1.2.17 den istenen elde edilir.

Sonuç 1.2.19 R değişmeli ve birimli bir halka ise
$a \in R$ için $(a) = aR = \{ ar \mid r \in R \}$

İspat: Teorem 1.2.17 ve sonuç 1.2.18

Örnek 1.2.20 Çift tam sayılar halkası E birim elemansızdır.

$$(2)=\{2r+2n \mid r\in E,\ n\in \mathbb{Z}\}=\{0,\mp 2,\mp 4,\dots\}$$

$2\in(2)$ dir. Ancak $\{2r \mid r\in E\}=\{0,\mp 4,\mp 8\dots\}$ olup bu küme 2'yi içermez.

Şimdi tam sayılar halkasının bir özelliğini ispatlayalım.

Teorem 1.2.20 Tam sayılar halkasının her ideali temel idealdir.

İspat: I, $\mathbb{Z}$ nin bir ideali olsun. $I=(0)$ ise açık. $I\neq(0)$ olsun. O zaman $\exists\, 0\neq u\in I$ vardır. $-u\in I$ dır. Genelliği bozmadan I idealinde pozitif tam sayıların vardığını kabul edebiliriz.

Pozitif tam sayılar iyi sıralı olduğundan I'da bir en küçük pozitif tam sayı vardır. Bunu a ile gösterelim. $a \in I$ olduğundan $(a) \subset I$ dır.
$b \in I$ alalım b yi a'ya kalanlı bölelim.
$b = aq + r$, $0 \leq r < a$, $\exists\, r, q \in \mathbb{Z}$ bulunabilir. b ve qa Inın elemanı olduğundan $r = b - aq \in I$ ve $0 \leq r < a$ bulunur. a nın seçimi nedeniyle $r = 0$ olması gerektiği anlaşılır. $b = qa \in (a)$ elde edilir. $I \subset (a)$ olup $I = (a)$ bulunur.

Tanım 1.2.21 Her ideali temel ideal olan tamlık bölgesine Temel ideal Bölgesi (TİB) denir.

Örnek 1.2.22 $\mathbb{Z}$ tam sayılar halkası TİB dir.

Teorem 1.2.23 $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$ ve $\text{okek}(x_1, \dots, x_n) = x$ olsun. $\bigcap_{i=1}^{n} (x_i) = (x)$ dir.

İspat: ideallerin kesisimi ideal ve $\mathbb{Z}$ TİB olduğundan $\bigcap_{i=1}^{n} (x_i) = (y)$ de bir temel idealdir.

$y \in \bigcap_{i=1}^{n} (x_i)$ ise $\forall i = 1, \dots, n$ için $y \in (x_i)$

$\forall i = 1, \dots n$ için $x_i | y$ o halde y bir ortak kattır. t, x_i'lerin bir ortak katı ise $\forall i = 1, \dots n$ için $x_i | t$, $t \in (x_i) \Rightarrow t \in \bigcap_{i=1}^{n} (x_i) = (y)$, $y | t$ bulunur. O halde $y = \text{okek}(x_1, \dots, x_n)$ dir.

Örnek 1.2.24 $\mathbb{Z}$'de (4), (5) ve (6) idealleri veriliyor. $(4)\cap(5)\cap(6) = (\text{okek}(4,5,6)) = (60)$ idealidir.

Tanım 1.2.25 I ve J bir R halkasının iki ideali olsun. $I+J=\{a+b \mid a\in I,\ b\in J\}$ kümesine I ve J ideallerinin toplamı denir.

Tanım 1.2.26 I ve J bir R halkasının iki ideali olsun. $I\cdot J=\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \mid a_i\in I,\ b_i\in J\right\}$ kümesine I ve J ideallerinin çarpımı denir.

Teorem 1.2.27 R bir halka I ve J R'nin iki ideali olsun.

i) $I+J$ R nin bir idealidir.

ii) $I \cdot J$ R nin bir idealidir.

İspat i) $I+J=\{a+b \mid a\in I,\ b\in J\}$ $\emptyset \neq I+J \subset R$ dir.

1) $\forall a_1+b_1,\ a_2+b_2 \in I+J \Rightarrow (a_1+b_1)-(a_2+b_2)=(a_1-a_2)+(b_1-b_2) \in I+J$

2) $\forall r \in R,\ \forall a+b \in I+J \Rightarrow$

$r(a+b)=ra+rb \in I+J$, $(a+b)r=ar+br \in I+J$ dir.

ii) $I \cdot J=\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \mid a_i \in I,\ b_i \in J\right\}$ $\emptyset \neq I \cdot J \subset R$ dir.

1) $\forall \sum_{i=1}^{n} a_i b_i,\ \sum_{j=1}^{m} a_j' b_j' \in I \cdot J$ için

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i - \sum_{j=1}^{m} a_j' b_j' = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{j=1}^{m} (-a_j' b_j') \in I \cdot J \text{ dir.}$$

2) $\forall \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \in I.J$ ve $\forall r \in R$ için

$$r.\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} (ra_i) b_i \in I.J \text{ ve } \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) r = \sum_{i=1}^{n} a_i (b_i r) \in I.J$$

olup $I.J$, R nin bir idealidir.

Teorem 1.2.28 $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}$ ve $\text{obeb}(x_1, \ldots, x_n) = x$ ise $(x_1) + \cdots + (x_n) = (x)$ dir.

İspat: $\text{obeb}(x_1, \ldots, x_n) = x \Rightarrow x = x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n$ olacak şekilde $\exists a_i \in \mathbb{Z}$ bulunabilir. O halde $x \in (x_1) + \cdots + (x_n)$ ve $(x) \subset (x_1) + \cdots + (x_n)$ bulunur.

Diğer yandan $x = \text{obeb}(x_1, \ldots, x_n)$ olduğundan $x | x_1, \ldots, x | x_n \Rightarrow \forall a_i \in \mathbb{Z}$ $(i = 1, \ldots, n)$ $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \in (x) \Rightarrow (x_1) + \cdots + (x_n) \subset (d)$ olup $(x_1) + \cdots + (x_n) = (x)$ bulunur.

Örnek 1.2.29 $\mathbb{Z}$ de $(4)+(5)+(6) = (\text{obeb}(4,5,6)) = (1) = \mathbb{Z}$

Teorem 1.2.30 R halkasının bütün ideallerinin kümesi $I(R)$ kapsama bağıntısına göre bir kafes oluşturur.

İspat: $(I(R), \subset)$ bir KSK dır. (öğrenciye bırakılmıştır)

Şimdi $\forall I, J \in I(R)$ için $\operatorname{Sup}\{I, J\} = I \vee J$ ve $\inf\{I, J\} = I \wedge J$ mevcut olduğunu göstermeliyiz.

$I, J \in I(R)$ olsun. $I \cap J$, $I + J \in I(R)$ dir.

$I, J \subseteq I + J$ olup $I, J \subseteq K$ olmak üzere $K \in I(R)$ ise $I + J \subseteq K$ bulunur. $\operatorname{Sup}\{I, J\} = I + J$ bulunur. Benzer şekilde $\inf\{I, J\} = I \wedge J = I \cap J$ olduğu gösterilebilir.

O halde $I(R)$ kafestir.

1.3. BÖLÜM HALKALARI

Tanım 1.3.1 R bir halka I, R nin bir ideali olsun. $\forall a,b \in R$ için $a \equiv b \pmod I \Leftrightarrow a-b \in I$ ile tanımlayalım.

Teorem 1.3.2 R halkasında yukarıda tanımlanan «$\equiv$» bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. $r \in R$'nin denklik sınıfıda $\bar{r} = r+I = \{ r+a \mid a \in I \}$ ile bellidir. Bütün denklik sınıflarının kümeside $R/_I$ ile gösterilir.

İspat: $\forall a \in R$ için $a-a=0_R \in I$ olup $a \equiv a \pmod I$ dır.
$a \equiv b \pmod I$ ise $a-b \in I \Rightarrow b-a \in I \Rightarrow b \equiv a \pmod I$
$a \equiv b \pmod I \wedge b \equiv c \pmod I \Rightarrow a-b \in I \wedge b-c \in I \Rightarrow$
$a-c \in I$ olup $a \equiv c \pmod I$ dır. O halde yansıma, simetri ve geçişme özellikleri sağlanmış olur.

$s \in R$ için $s \equiv r \pmod{I} \Longleftrightarrow s \in r+I$ denkliğinden r ile denk elemanların kümesi yani r elemanının denklik sınıfı $\bar{r} = r+I$ olduğu görülür.

Teorem 4.3.3 R halkasının, bir I idealine göre tanımlanan denklik sınıfları arasında $\forall a+I, b+I \in R/I$ için $(a+I) \oplus (b+I) = (a+b)+I$, $(a+I) \odot (b+I) = (a.b)+I$ ile tanımlanan $\oplus, \odot$ işlemleriyle birlikte R/I bir halkadır. Bu halkaya R'nin I idealine göre Bölüm Halkası denir.

İspat: Önce $\oplus, \odot$ işlemlerinin iyi tanımlı olduklarını gösterelim. $a+I = a'+I$ ve $b+I = b'+I \Longrightarrow$ $a-a', b-b' \in I \Rightarrow a-a'+b-b' \in I \Rightarrow (a+b)-(a'+b') \in I$ $\Rightarrow a+b \equiv (a'+b') \pmod{I}$ bulunur.

Benzer şekilde $a-a', b-b' \in I \Rightarrow (a-a')b = ab - a'b \in I$,
$a'(b-b') = a'b - a'b' \in I \Rightarrow ab - a'b' \in I$ olup
$ab \equiv a'b' \pmod{I}$ bulunur. O halde işlemler iyi tanımlıdır.

$(R/I, \oplus, \odot)$ üçlüsünün halka olduğunu göstermeyi öğrenciye ödev olarak bırakılmıştır.

Örnek 1.3.4 $\mathbb{Z}$ halkasının (m) idealine göre bölüm halkası $\mathbb{Z}/(m) = \mathbb{Z}_m$ dir.

$a, b \in \mathbb{Z}$ için $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a-b \in (m)$
$\Leftrightarrow a-b = mt,\ t \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow m \mid a-b$ bulunur.

Teorem 1.3.5 R bir halka ve I, R'nin bir ideali olsun. S, R'nin I'yı kapsayan bir althalkası ise S/I, R/I nın bir althalkasıdır. Tersine R/I nın her althalkası da S, R'nin I'yı kapsayan bir althalkası olmak üzere S/I şeklindedir.

İspat: S, R'nın I idealini kapsayan bir althalkası ise I, S'ninde bir ideali olur. $S/I \subset R/I$ dır.

$\forall\, s+I,\ t+I \in S/I$ için $(s+I) \oplus (t+I) = (s+t)+I$,

$(s+I) \odot (t+I) = s.t+I$ ve $s, t \in S$ için $s+t,\ s.t \in S$ olduğundan S/I, R/I nın bir althalkasıdır. $\bar{U}$, R/I nın althalkası olsun. $U = \{ r \in R \mid r+I \in \bar{U} \}$ diyelim. $I \subset U$ ve U, R'nin bir althalkasıdır. (göster) Bölüm halkası tanımından $U/I = \bar{U}$ olduğu açıktır.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Cebir II

Prof. Dr. Şenol EREN