ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Cebir 2

Bazı Özel Halkalar

Prof. Dr. Şenol EREN

Ders 3

Teorem 1.1.29 R birimli halkasının krakteristiğinin $n>0$ tam sayısı olması için gerek ve yeter şart halkanın toplamsal grubunda birimin mertebesinin n olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ $\text{krak}(R)=n$ olsun. Şu halde $\forall a\in R$ için $n.a=0_R$ özel olarak $n.1_R=0_R$ dir. Eğer bir $0<p<n$ için $p.1_R=0_R$ ise $\forall a\in R$ için $pa=p(1_Ra)=0_R$dir. Bu ise $\text{krak}(R)=n$ olmasıyla çelişir. Şu halde R'nin toplamsal grubunda birimin mertebesi n dir.

$(\Leftarrow)$ $\forall a\in R$ için $n.a=n.(1_Ra)=(n.1_R)a=0_R.a=0_R$ olacağından $a=1_R$ için n'nin en küçük olmasından n'nin $\text{krak}(R)$ olduğu anlaşılır.

Teorem 1.1.30 R bir tamlık bölgesi ise sıfırdan farklı her elemanın R'nin toplamsal grubundaki mertebeleri aynıdır.

İspat: $\text{Krak}(R)=n$ olsun. $0_R \neq a \in R$ ve a'nın $(R,+)$ grubundaki mertebesi k ise $ka=0_R$ yapan en küçük pozitif tam sayı k dır. $k.a=k(1_R a)=(k.1_R)a=0_R$ şu halde $n\leq k$ dır.

Tersine $n.1_R=0_R \Rightarrow 0_R=(n.1_R)a=n.(1_R a)=na$ olduğundan $k=o(a)\leq n$ olup $n=k$ bulunur.

Eğer $\text{Krak}(R)=0$ ise sıfırdan farklı her elemanın mertebesi sonsuzdur.

Teorem 1.1.31 Bir R tamlık bölgesinin krakteristiği ya sıfırdır yada bir asal tam sayıdır.

İspat: $krak(R)=0$ ise açık. $\forall a \in R$ için $n.a=0_R$ şartını sağlayan n pozitif tam sayısı olsun. m de $m.a=0_R$ şartını sağlayan enküçük pozitif tam sayı olsun. $m.1_R=0_R$ dir. m asal değilse $1<m_1,m_2<m$ ve $m=m_1.m_2$, $\exists m_1,m_2 \in \mathbb{Z}$ vardır.

$0_R = m.1_R = (m_1 m_2)1_R = (m_1 1_R)(m_2 1_R)$ olur.

R sıfır bölensiz olduğundan ya $m_1 1_R = 0_R$ yada $m_2 1_R = 0_R$ dir. Bu da m'nin seçimi ile çelişir. O halde m asaldır.

Teorem 1.1.32 Sonlu elemanlı tamlık bölgesi cisimdir.

İspat: R sonlu tamlık bölgesi olsun. $\forall 0_R \neq a \in R$ için $a^{-1} \in R$ olduğunu göstermeliyiz. $R = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ olsun. R'de sabit bir eleman a $(a = a_j, 1 \leq j \leq n)$ olsun. $f(a_i) = aa_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ile $f : R \longrightarrow R$ fonksiyonunu tanımlayalım. $f(a_i) = f(a_k) \Rightarrow aa_i = aa_k \Rightarrow a_i = a_k$ olup f 1-1 dir. f aynı zamanda örtendir (neden) özel olarak $1_R \in R$ için $1_R = f(a_i) = aa_i$ olacak şekilde $\exists i = 1, 2, \ldots, n$'nin varlığı gösterilmiş olur. Değişme özelliği sağlandığından a'nın tersinin varlığı görülür.

Örnek 1.1.33 p asal ise $\mathbb{Z}_p$ p elemanlı cisimdir.

Tanım 1.1.34 R bir halka $a \in R$ olsun. $a = aba$ olacak şekilde $\exists b \in R$ varsa $a \in R$'ye regüler eleman denir.

Tanım 1.1.35 Bir R halkasının her elemanı regüler eleman ise R'ye Regüler halka denir.

Örnek 1.1.36 $\mathbb{Z}$ tam sayılar halkası regüler halka değildir. $\mathbb{Z}$nin regüler elemanları $0, 1, -1$ dir.

Örnek 1.1.37 Her Boole halkası regüler halkadır. $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi Regüler halkadır, fakat Boole halkası değildir.

Problem 1.1.38 $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi olsun. $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ üzerinde $\forall x,y,z,w \in \mathbb{R}$ için
$(x,y)+(z,w)=(x+z,y+w)$, $(x,y)(z,w)=(xz, y\cdot w)$
işlemleri tanımlanıyor $(\mathbb{R}\times\mathbb{R},+,\cdot)$ bir birimli ve değişmeli halkadır (neden) regülermidir?

Çözüm: $(1,0),(0,1)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ için $(0,1)\cdot(1,0)=(0,0)$ olup cisim değildir. $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ olsun.

$x=y=0 \Rightarrow (x,y)(x,y)(x,y)=(x,y)$

$x\neq 0, y=0 \Rightarrow (x,y)\cdot(x^{-1},y)(x,y)=(x,y)$

$x=0, y\neq 0 \Rightarrow (x,y)(x,y^{-1})(x,y)=(x,y)$

$x\neq 0, y\neq 0 \Rightarrow (x,y)(x^{-1},y^{-1})(x,y)=(x,y)$ olup

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ elemanı regüler olduğundan $(\mathbb{R}\times\mathbb{R},+,\cdot)$ regüler halkadır.

Teorem 1.1.39 $R \neq \{0_R\}$ regüler halka olsun. $\forall x \in R$ için $x = xyx$ olacak şekilde bir tek $y \in R$ varsa;

i) R sıfır bölensizdir.

ii) $x \neq 0_R$ ve $x = xyx$ ise $\forall x, y \in R$ için $y = yxy$ dir.

iii) R birimlidir.

iv) R bir bölme halkasıdır.

İspat: i) $0_R \neq x \in R$ ve bir $z \in R$ için $x.z = 0_R$ olsun. Hipotezden $x = xyx$ olacak şekilde bir tek $y \in R$ vardır.

$x(y-z)x = xyx - xzx = xyx - 0_R x = xyx \Rightarrow$

y'nin tekliğinden $y - z = y \Rightarrow z = 0_R$ dir.

ii) $x \neq 0_R$ ve $xyx = x$ olsun.

$$x(y - yxy) = xy - x(yxy) = xy - (xyx)y$$
$$= xy - xy = 0_R \text{ olur.}$$

R sıfır bölensiz olduğundan $y - yxy = 0_R \Rightarrow y = yxy$ dir.

iii) $0_R \neq x \in R$ ve $xyx = x$, bir tek $y \in R$ olsun.
$e = yx$ diyelim $e = 0_R \Rightarrow x = xyx = 0_R \Rightarrow x = 0_R$ olup çelişki bulunur. $e \neq 0_R$ dir. $e^2 = (yx)(yx) = y(xyx) = yx = e$ olup e idempotent elemandır. $z \in R$ alalım.
$(ze - z)e = ze^2 - ze = ze - ze = 0_R \Rightarrow ze - z = 0_R \Rightarrow ze = z$ bulunur. Benzer şekilde $e(ez - z) = 0_R$ den $ez = z$ olup e, R'nin birimidir.

iv) iii den R birimlidir. $0_R \neq x \in R$ için $x^{-1} \in R$ olduğunu göstermeliyiz. $0_R \neq x \in R$ olsun $xyx = x$ bir tek $y \in R$ vardır.

$xyx = xe \Rightarrow xyx - xe = 0_R \Rightarrow x(yx - e) = 0_R$
$\Rightarrow$ R sıfır bölensiz olduğundan $yx - e = 0_R$
$\Rightarrow$ $yx = e$ bulunur. Benzer şekilde $xyx = ex$ alınarak $xy = e$ olduğu gösterilebilir. O halde $0_R \neq x \in R$ terslenebilir dolayısıyla R bölme halkasıdır.

Teorem 1.1.40 R ve S iki halka olsun. $R\times S$ aşağıdaki işlemler ile bir halkadır. Bu halkaya R ile S halkalarının direkt çarpımı denir $R\oplus S$ ile gösterilir.

$$(r_1,s_1)+(r_2,s_2)=(r_1+r_2,\ s_1+s_2)$$

$$(r_1,s_1)\cdot(r_2,s_2)=(r_1\cdot r_2,\ s_1\cdot s_2),\quad r_1,r_2\in R,\ s_1,s_2\in S$$

İspat: $R\times S=\{(r,s)\mid r\in R,\ s\in S\}$ olmak üzere okuyucuya bırakılmıştır.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Şenol EREN

Cebir II

Ders 3