



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



1

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Cebir 2
Halkalar

Prof. Dr. Şenol EREN

Ders 1

CEBİR II

BÖLÜM I

1.1 HALKALAR

Tanım 1.1.1: $R \neq \emptyset$ kümesi üzerinde tanımlı iki ikili işlem $+$ ve \cdot olsun. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan $(R, +, \cdot)$ cebirsel yapısına bir halka denir.

H1: $(R, +)$ değişmeli gruptur.

H2: \cdot işleminin R 'de birleşme özelliği vardır.

H3: \cdot işleminin $+$ işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliği vardır. Yani

$\forall a, b, c \in R$ için $a \cdot (b+c) = ab + ac$, $(a+b)c = ac + bc$ dir.

(2)

$(R, +)$ değişmeli grubunun birim elemanı 0 veya 0_R ile gösterilir. Buna R halkasının sıfırı denir. Ayrıca $a \in R$ elemanının $+$ işlemine göre tersi $-a$ ile gösterilir.

Halkanın \cdot işlemine göre etkisiz elemanı olmayabilir. Eğer varsa buna halkanın birim elemanı denir ve 1 veya 1_R ile gösterilir. Böyle halkaya birimli halka denir. Ayrıca halka ikinci işleme göre değişme özelliğine sahipse halkaya değişmeli halka denir. Halka sonlu elemanlı ise sonlu halka, aksi halde sonsuz halka olarak adlandırılır.

Tanım 1.1.2 $(R, +, \cdot)$ bir halka olsun. $\{a \in R \mid \forall b \in R, ab = ba\}$ kümesine halkanın merkezi denir ve $M(R)$ ile gösterilir. Özel olarak $Z = M(R)$ ise R değişmeli halkadır.

Gruplarda olduğu gibi, iki eleman için tanımlı $+$ ve \cdot işlemleri sonlu sayıda eleman için de tümevarımla tanımlanabilir. Bu durumda

$$(a_1 + \dots + a_k) + (a_{k+1} + \dots + a_n) = \left(\sum_{i=1}^k a_i \right) + \left(\sum_{i=k+1}^n a_i \right) = \sum_{i=1}^n a_i$$

$$\left(\prod_{i=1}^k a_i \right) \left(\prod_{i=k+1}^n a_i \right) = \prod_{i=1}^n a_i, \quad \left(\sum_{i=1}^m a_i \right) \left(\sum_{j=1}^n b_j \right) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_i b_j \right)$$

Örnek 1.1.3: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$
birer değişmeli ve birimli halkadır.

Örnek 1.1.4: \mathbb{R} reel sayılar kümesi olmak üzere
 $R = \{ f \mid f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ fonksiyon} \}$ kümesi üzerinde
 $+$, \cdot işlemleri sırasıyla $\forall f, g \in R, \forall a \in \mathbb{R}$ için
 $(f+g)(a) = f(a) + g(a)$, $(f \cdot g)(a) = f(a)g(a)$ şeklinde
tanımlansın. $(R, +, \cdot)$ bir halkadır.

$\forall f, g, f', g' \in R, \forall a \in \mathbb{R}$ için $f = f', g = g'$ ise
 $(f+g)(a) = f(a) + g(a) = f'(a) + g'(a) = (f'+g')(a)$ ve
 $(f \cdot g)(a) = f(a) \cdot g(a) = f'(a) \cdot g'(a) = (f' \cdot g')(a)$ olup
 $f+g = f'+g', f \cdot g = f' \cdot g'$ gerçekleştiğinden
 $+$, \cdot R üzerinde birer ikili işlemdir. Diğer
özellikler kolaylıkla sağlandığından ödev
bırakılmıştır.

¹⁾ Örnek 1.1.4: A bir küme ve $\mathcal{P}(A)$, A 'nın kuvvet kümesi olsun. $\forall X, Y \in \mathcal{P}(A)$ için $X+Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ ve $X \cdot Y = X \cap Y$ ile tanımlanıyor. $(\mathcal{P}(A), +, \cdot)$ bir halkadır.

Sadece H_2 özelliğini göstereyim.

$X, Y, Z \in \mathcal{P}(A)$ için

$$\begin{aligned}
 X \cdot (Y+Z) &= X \cap (Y+Z) = X \cap [(Y \setminus Z) \cup (Z \setminus Y)] \\
 &= [X \cap (Y \setminus Z)] \cup [X \cap (Z \setminus Y)] \\
 &= [(X \cap Y) \setminus (X \cap Z)] \cup [(X \cap Z) \setminus (X \cap Y)] \\
 &= (X \cap Y) + (X \cap Z) \\
 &= (X \cdot Y) + (X \cdot Z)
 \end{aligned}$$

Teorem 1.1.5: R bir halka, $\forall a, b \in R$ için

$$i) a \cdot 0_R = 0_R \cdot a = 0_R$$

$$ii) a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(ab)$$

$$iii) (-a) \cdot (-b) = a \cdot b \text{ dir.}$$

İspat: i) Halkanın sıfır elemanı tanımı ve soldan dağılıma özelliğini kullanarak

$\forall a \in R$ için $a \cdot 0_R = a \cdot (0_R + 0_R) = a \cdot 0_R + a \cdot 0_R$ den $a \cdot 0_R = 0_R$ bulunur. Benzer düşünce ile $0_R \cdot a = 0_R$ olduğu gösterilir.

ii) $\forall a, b \in R$ için $0_R = a \cdot 0_R = a \cdot (b + (-b)) = ab + a(-b)$ dir. $a(-b) = -(ab)$ elde edilir. Benzer şekilde $(-a)b = -(ab)$ olduğu gösterilebilir.

iii) ii kullanılarak $\forall a, b \in R$ için

$$(-a)(-b) = -(a(-b)) = -(-(ab)) = ab \text{ bulunur.}$$

Sonuç 1.1.6: R birimli bir halka ise, $\forall a \in R$ için

i) $(-1_R)a = -a$

ii) $(-1_R) \cdot (-1_R) = 1_R$ dir.

İspat: Teorem 1.1.5

Örnek 1.1.7: $R = \{0\}$ tek elemanlı bir halkadır.

Buna asikar halka denir. Genel olarak halkayı asikar halkadan farklı kabul edeceğiz.

Teorem 1.1.8: R birimli bir halka olsun. Bu durumda $R \neq \{0\} \Leftrightarrow 0_R$ ve 1_R farklıdır.

İspat: $(\Rightarrow) R \neq \{0\} \Rightarrow \exists a \in R$ ve $a \neq 0$ dir.

$1_R = 0_R \Rightarrow a = a \cdot 1_R = a \cdot 0_R = 0_R$ çelişkisi bulunur.

$(\Leftarrow) 1_R \neq 0_R$ ise $R \neq \{0\}$ dir.

Tanım 1.1.9: R bir halka olsun. $0_R \neq a \in R$ için $a \cdot b = 0_R$ veya $b \cdot a = 0_R$ olacak şekilde $\exists 0_R \neq b \in R$ varsa a 'ya halkanın sıfır bölen elemanı denir. Halkada bütün elemanlar için böyle bir b elemanı yoksa halkaya sıfır bölensiz halka denir.

Örnek 1.1.10 $m > 0$ bir tam sayı olmak üzere $\text{mod } m$ 'ye göre kalan sınıfları kümesi \mathbb{Z}/m olmak üzere $(\mathbb{Z}/m, \oplus, \odot)$ bir halkadır. $m = p$ (p asal) ise \mathbb{Z}/p sıfır bölensiz halka, $m \neq p$ ise \mathbb{Z}/m sıfır bölentli bir halkadır.

9

Tanım 1.1.11: R birimli bir halka olsun. $u \in R$ için $u \cdot v = v \cdot u = 1_R$ olacak şekilde $v \in R$ elemanı varsa $u \in R$ 'ye birimsel eleman denir. R halkasının tüm birimsel elemanlarının kümesi U_R ise gösterilir.

Örnek 1.1.12: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ halkasının birimselleri $U_{\mathbb{Z}} = \{1, -1\}$

Örnek 1.1.13: $(\mathbb{Z}_7, \oplus, \odot)$ halkasının birimselleri $U_{\mathbb{Z}_7} = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$ dir.



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Şenol EREN

Cebir II

Ders 1