ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Diferansiyel Denklemler II

Dr. Öğretim Üyesi Fatma HIRA

Ders 7

Uygulama 3

① $y^{(4)} - y''' = 1$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$P(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 = 0 \rightarrow \lambda^3(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \; \lambda_4 = 1$$

olacağından homojen kısmın genel çözümü $y_h = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^x$ dir.

$$y_ö = \frac{1}{D^4 - D^3}(1) = \frac{1}{-D^3\underbrace{(1-D)}_{P(D)}} 1 = -\frac{1}{D^3}\left(1 + D + D^2 + \dots\right)(1)$$

$$= -\frac{1}{D^3}\left(1 + \underbrace{D.1}_{0} + \underbrace{D^2.1}_{0} + \dots\right) = -\frac{1}{D^3} 1 = -\frac{1}{D^2} x = -\frac{1}{D}\frac{x^2}{2} = -\frac{x^3}{6}$$

olur.

Genel çözüm $y = y_h + y_ö = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^x - \frac{x^3}{6}$ olur.

Belirsiz katsayılar ile özel çözüm aransa idi;

$B(x) = 1$ olduğu için $y_ö = A$ şeklinde aranmalıdır fakat bu y_h ile lineer bağımlı olur. Ax, Ax^2 de lineer bağımlı olacağından $y_ö = Ax^3$ şeklinde aranmalıdır. $y_ö' = 3Ax^2$, $y_ö'' = 6Ax$, $y_ö''' = 6A$, $y_ö^{(4)} = 0$ için

$$y^{(4)} - y''' = 1 \Rightarrow 0 - 6A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{6} \Rightarrow y_ö = -\frac{1}{6}x^3$$ olarak bulunur.

② $y'' - y' = x^3 - x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$\ell(\lambda) = \lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1$ olup

homojen kısmın genel çözümü $y_h = c_1 + c_2 e^x$ dur.

$$y_ö = \frac{1}{D^2 - D}(x^3 - x) = \frac{1}{-D(\underbrace{1 - D}_{\varphi(D)})}(x^3 - x) = \frac{-1}{D}\left(1 + D + D^2 + D^3 + \dots\right)(x^3 - x)$$

$$= \frac{-1}{D}\left\{x^3 - x + D(x^3 - x) + D^2(x^3 - x) + D^3(x^3 - x) + D^4(x^3 - x) + \dots\right\}$$

$$= \frac{-1}{D}\left\{x^3 - x + 3x^2 - 1 + 6x + 6 + 0 + 0 + \dots\right\}$$

$$= \frac{-1}{D}\left\{x^3 + 3x^2 + 5x + 5\right\}$$

$$= -\frac{x^4}{4} - x^3 - 5\frac{x^2}{2} - 5x \quad \text{dur.}$$

Genel çözüm $y = y_h + y_ö = c_1 + c_2 e^x - \frac{x^4}{4} - x^3 - 5\frac{x^2}{2} - 5x$ dur.

veya belirsiz katsayılar yöntemi ile özel çözüm

$y_ö = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ şeklinde aranır. Fakat bu

$y_h = c_1 + c_2 e^x$ ile lineer bağımlı olup özel çözüm

$y_ö = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx$ formunda aranmalıdır.

$y_ö' = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D$, $y_ö'' = 12Ax^2 + 6Bx + 2C$

olup denklemde yazılırsalar

$y_ö'' - y_ö' = x^3 - x$

$12Ax^2 + 6Bx + 2C - 4Ax^3 - 3Bx^2 - 2Cx - D = x^3 - x$

$-4A = 1 \Rightarrow A = -1/4$ $2C - D = 0 \Rightarrow D = -5$

$12A - 3B = 0 \Rightarrow B = -1$

$6B - 2C = -1 \Rightarrow C = -5/2$

$\Rightarrow y_ö = -\frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 5x$ şeklinde de bulunabilir.

③ $y'' + y' - 2y = e^x + 4\sin x + x^2 - x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$\ell(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda+2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2 \Rightarrow$$

$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$ olur.

$$y_ö = \frac{1}{D^2+D-2}\left(e^x + 4\sin x + x^2 - x\right)$$

$$= \frac{1}{(D-1)(\underbrace{D+2}_{3})} e^x + \frac{1}{\underbrace{D^2}_{-1}+D-2} 4\sin x + \frac{1}{D^2+D-2} x^2 - x$$

$$= \frac{1}{3}\frac{1}{D-1} e^x + \frac{1}{D-3} 4\sin x + \frac{1}{-2\left(1 - \frac{D^2+D}{2}\right)} (x^2 - x)$$

$(D+3)$

$$\cancel{D^4} + \cancel{2D^3} + D^2$$

$$= \frac{1}{3} e^x \frac{1}{D+\cancel{1}-\cancel{1}} 1 + \frac{D+3}{\underbrace{D^2}_{-1}-9} 4\sin x - \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{D^2+D}{2} + \left(\frac{D^2+D}{2}\right)^2 + \cdots\right\}(x^2 - x)$$

$$= \frac{1}{3} e^x \frac{1}{D} 1 - \frac{1}{10}(D+3)(4\sin x) - \frac{1}{2}\left\{x^2 - x + \frac{1}{2}\{2 + 2x - 1\} + \frac{2}{4}\right\}$$

108 -

$$y_{ö}^{u} = \frac{1}{3}e^{x}.x - \frac{1}{10}4\cos x - \frac{12}{10}\sin x - \frac{1}{2}\{x^2+1\}$$

$$= \frac{xe^{x}}{3} - \frac{2}{5}\cos x - \frac{6}{5}\sin x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

bulunur. Genel çözüm

$$y = y_h + y_{ö}^{u}$$

$$= c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{3}xe^{x} - \frac{2}{5}\cos x - \frac{6}{5}\sin x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

olur.

veya belirsiz katsayılar ile çözüm

$y_{ö}^{u} = Ae^{x} + B\sin x + C\cos x + Dx^2 + Ex + F$ şeklinde aranırsa

$y_h = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}$ için lineer bağımlılık söz konusu olup özel

çözüm

$y_{ö}^{u} = Axe^{x} + B\sin x + C.\cos x + Dx^2 + Ex + F$ şeklinde aranmalıdır.

$$y_{\ddot{o}}' = Ae^x + Axe^x + B\cos x - C\sin x + 2Dx + E$$

$$y_{\ddot{o}}'' = 2Ae^x + Axe^x - B\sin x - C\cos x + 2D$$

$$y_{\ddot{o}}'' + y' - 2y = e^x + 4\sin x + x^2 - x$$

$$\Rightarrow 2Ae^x + \cancel{Axe^x} - B\sin x - C\cos x + 2D + Ae^x + \cancel{Axe^x} + B\cos x - C\sin x + 2Dx$$
$$+ E - 2\cancel{Axe^x} - 2B\sin x - 2C\cos x - 2Dx^2 - 2Ex - 2F = e^x + 4\sin x + x^2 - x$$

$\Rightarrow$

$$3Ae^x + \sin x\{-3B - C\} + \cos x\{-3C + B\} + x^2\{-2D\} + x\{2D - 2E\} + 2D + E - 2F$$
$$= e^x + 4\sin x + x^2 - x$$

$3A = 1 \Rightarrow A = 1/3$

$-3B - C = 4 \quad , \quad -3C + B = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{2}{5} \quad , \quad B = -\frac{6}{5}$

$-2D = 1 \Rightarrow D = -1/2$

$2D - 2E = -1 \Rightarrow E = 0$

$2D + E - 2F = 0 \Rightarrow F = -1/2$

$\Rightarrow y_{\ddot{o}} = \frac{1}{3}xe^x - \frac{6}{5}\sin x - \frac{2}{5}\cos x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ bulunur.

④ $(D^2-1)y = x^2\cos x$ denkleminin özel çözümünü bulunuz.

$$y_ö = \frac{1}{D^2-1}x^2\cos x = \frac{1}{D^2-1}x\cdot(x\cos x) = x\cdot\frac{1}{D^2-1}x\cos x - \frac{2D}{(D^2-1)^2}x\cos x$$

$$= x\left\{x\frac{1}{\underset{-1}{D^2}-1}\cos x - \frac{2D}{(\underset{(-1)}{D^2}-1)^2}\cos x\right\} - 2D\left\{x\cdot\frac{1}{(\underset{-1}{D^2}-1)^2}\cos x - \frac{4D}{(\underset{-1}{D^2}-1)^3}\cos x\right\}$$

$$= x\left\{-\frac{x}{2}\cos x - \frac{1}{2}D\cos x\right\} - 2D\left\{\frac{x}{4}\cos x + \frac{1}{2}D\cos x\right\}$$

$$= x\left\{-\frac{x}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right\} - 2D\left\{\frac{x}{4}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right\}$$

$$= x\left\{-\frac{x}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right\} - 2\left\{\frac{1}{4}\cos x - \frac{x}{4}\sin x - \frac{1}{2}\cos x\right\}$$

$$= \frac{1}{2}(-x^2+1)\cos x + x\sin x$$

şeklindedir.

veya belirsiz katsayılar yöntemi ile çözüm aranırsa;

$c(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda+1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1 \Rightarrow$

$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ dır.

$B(x) = x^2 \cos x$ olduğundan

$y_ö = (Ax^2 + Bx + C)\cos x + (Dx^2 + Ex + F)\sin x$

şeklinde aranmalıdır.

İki kez türev alınıp denklemde yerine yazılıp sağ-sol eşitliğinden A, B, C, D, E, F belirsiz katsayıları bulunursa

$\left(A = -\frac{1}{2} \;,\; B = 0 \;,\; C = \frac{1}{2} \;,\; D = 0 \;,\; E = 1 \;,\; F = 0 \right)$

$y_ö = -\frac{x^2}{2}\cos x + \frac{1}{2}\cos x + x \sin x$ olur.

Ödev: $y'' - 4y' = 32x\sin^2 x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Ödev: $y'' + 6y' + 8y = \cosh 2x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Ödev: $y''' + y'' = x^2 + 1 + 3xe^x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Dr. Öğretim Üyesi Fatma HIRA