ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Diferansiyel Denklemler II

Dr. Öğretim Üyesi Fatma HIRA

Ders 6

1.4.2. Ters Operatör Yöntemi

$\ell(D)y = B(x)$ denkleminin bir özel çözümü $y_ö$ ise

$\ell(D)y_ö = B(x)$ sağlanır. $\ell(D)$ lineer diferansiyel operatörünün

ters operatörü $\ell^{-1}(D) = \dfrac{1}{\ell(D)}$ olarak tanımlanırsa

$$\ell^{-1}(D)\left(\ell(D)y_ö\right) = \ell^{-1}(D)B(x)$$

$$\Rightarrow \quad y_ö = \ell^{-1}(D)B(x) = \frac{1}{\ell(D)}B(x) \quad \text{olarak bulunur.}$$

$D = \dfrac{d}{dx}$ türev operatörü olduğu için türevin tersi olarak

$\dfrac{1}{D}$ operatörüne integral operatörü olarak bakılabilir.

$$\frac{1}{D}x = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}, \qquad \frac{1}{D}1 = \int 1\,dx = x,$$

$$\frac{1}{D^2}x = \frac{1}{D}\left(\frac{1}{D}x\right) = \frac{1}{D}\frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{6} \quad \text{olur.}$$

Ters Operatörün Temel Özellikleri

1) $L(D)\left(L^{-1}(D)\,y(x)\right) = y(x)$

2) Ters operatör lineer dir yani

$$L^{-1}(D)\left(c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)\right) = c_1 L^{-1}(D) y_1(x) + c_2 L^{-1}(D) y_2(x)$$ sağlanır.

3) $L_1^{-1}(D)\, L_2^{-1}(D)\, y(x) = L_2^{-1}(D)\, L_1^{-1}(D)\, y(x)$

4) $\left(L_1^{-1}(D) + L_2^{-1}(D)\right) y(x) = L_1^{-1}(D)\, y(x) + L_2^{-1}(D)\, y(x)$

5) $\dfrac{L_1(D)}{L_2(D)}\, y(x) = L_1(D)\left(\dfrac{1}{L_2(D)}\, y(x)\right)$

6) $L_1(D)\, y = L_2(D)\, f(x)$ ise $\quad y = \dfrac{L_2(D)}{L_1(D)}\, f(x)$

7) $\left(\dfrac{L_1(D)}{L_3(D)} + \dfrac{L_2(D)}{L_3(D)}\right) y = \left(\dfrac{L_1(D) + L_2(D)}{L_3(D)}\right) y$

Teorem 11: $L(D)y = B(x)$ denkleminde $B(x) = e^{ax}$ olsun. Bu durumda a, $L(a) \neq 0$ olacak şekilde reel veya kompleks bir sabit ise

$$y_ö = L^{-1}(D)e^{ax} = \frac{1}{L(D)}e^{ax} = \frac{1}{L(a)}e^{ax} \quad \text{dır.}$$

İspat: Teorem 10 da $L(D)e^{ax} = e^{ax}L(a)$, $L(a) \neq 0$ olduğu ispat edilmişti. Buradan

$$L^{-1}(D)\left(L(D)e^{ax}\right) = L^{-1}(D)\left(e^{ax}L(a)\right)$$

$$\Rightarrow \quad e^{ax} = L(a)\,L^{-1}(D)e^{ax}$$

$$\Rightarrow \quad e^{ax} = L(a)\frac{1}{L(D)}e^{ax}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{L(D)}e^{ax} = \frac{e^{ax}}{L(a)}, \quad L(a) \neq 0 \quad \text{dur.}$$

Örnek: $(D^2 - 3D + 8)y = e^{2x}$ denkleminin bir özel çözümünü bulunuz.

$$y_ö = \frac{1}{L(D)}e^{2x} = \frac{1}{(D^2-3D+8)}e^{2x} = \frac{1}{2^2-3.2+8}e^{2x} = \frac{1}{6}e^{2x} \quad \text{olur.}$$

Teorem 12: $L(D)y = B(x)$ denkleminde $B(x) = e^{ax} f(x)$ olsun. Bu durumda özel çözüm

$$y_ö = \frac{1}{L(D)}\left(e^{ax} f(x)\right) = e^{ax} \frac{1}{L(D+a)} f(x) \quad \text{dır.}$$

İspat: Teorem 10 da $L(D)\left(e^{ax} u(x)\right) = e^{ax} L(D+a)\, u(x)$ olduğu ispat edilmişti. Burada $u(x)$ yerine $\frac{1}{L(D+a)} f(x)$ alınırsa

$$L(D)\left(e^{ax} \frac{1}{L(D+a)} f(x)\right) = e^{ax} L(D+a) \frac{1}{L(D+a)} f(x)$$

$$\Rightarrow L(D)\left(e^{ax} \frac{1}{L(D+a)} f(x)\right) = e^{ax} f(x)$$

$$\Rightarrow e^{ax} \frac{1}{L(D+a)} f(x) = \frac{1}{L(D)}\left(e^{ax} f(x)\right)$$

eşitliği sağlanır.

Örnek: $(D-1)^2 y = xe^x$ denkleminin bir özel çözümünü bulunuz.

$$y_ö = \frac{1}{\ell(D)}(xe^x) = \frac{1}{(D-1)^2}(xe^x) = e^x \frac{1}{(D-1+1)^2} x$$

$$= e^x \frac{1}{D^2} x = e^x \left(\frac{1}{D}\right)\left(\frac{1}{D} x\right) = e^x \frac{1}{D} \frac{x^2}{2} = e^x \frac{x^3}{6}$$

olur.

Not: Teorem 12., Teorem 11 deki $\ell(a) = 0$ durumu içinde uygulanabilir. ($f(x) = 1$ olarak düşünülür)

Örnek: $(D+2)^2 y = e^{-2x}$ denkleminin bir özel çözümünü bulunuz.

$$y_ö = \frac{1}{(D+2)^2} e^{-2x} = \frac{1}{\underbrace{(-2+2)^2}_{0}} e^{-2x}$$

$\ell(-2) = 0$ oluyor. olmaktadır.

$$y_ö = \frac{1}{(D+2)^2} e^{-2x} \cdot 1 = e^{-2x} \frac{1}{(D-2+2)^2} 1 = e^{-2x} \frac{1}{D^2} 1 = e^{-2x} \frac{1}{D} x = e^{-2x} \frac{x^2}{2}$$

bulunur.

Not: a, $\ell(\lambda)$ karakteristik denklemin m katlı kökü olsun.

$\ell(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$ olmak üzere $f(\lambda)$ $n-m$. dereceden sabit katsayılı bir polinom ve $f(a) \neq 0$ olmak üzere

$$\ell(\lambda) = (\lambda - a)^m f(\lambda) \quad \text{ve dolayısıyla} \quad \ell(D) = (D-a)^m f(D)$$

yazılabilir.

$$y_ö = \frac{1}{\ell(D)} e^{ax} = \frac{1}{\underbrace{(D-a)^m f(D)}_{\substack{\ell(a)=0 \\ \text{oluyor}}}} e^{ax} = \frac{1}{(D-a)^m}\left(\frac{1}{f(D)} e^{ax}\right) = \frac{1}{(D-a)^m} \frac{1}{f(a)} e^{ax}$$

$$= \frac{1}{f(a)} \frac{1}{(D-a)^m} e^{ax} = \frac{1}{f(a)} e^{ax} \frac{1}{(D-a+a)^m} 1$$

$$= \frac{1}{f(a)} e^{ax} \frac{1}{D^m} 1 = \frac{1}{f(a)} e^{ax} \frac{x^m}{m!} \quad \text{dur.}$$

A: $\ell(D) = (D-a)^n$ ise $y_ö = \dfrac{1}{(D-a)^n} e^{ax} = \dfrac{x^n e^{ax}}{n!}$ olur.

Örnek 4: $y'' + 4y' + y = 2e^{-x} + 1$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$\ell(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (3\lambda+1)(\lambda+1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1/3,\ \lambda_2 = -1$$

olup $y_h = c_1 e^{-\frac{1}{3}x} + c_2 e^{-x}$ olur.

$$y_ö = \frac{1}{\ell(D)}(2e^{-x}+1) = \underbrace{\frac{1}{\ell(D)}(2e^{-x})}_{y_{ö1}} + \underbrace{\frac{1}{\ell(0)}1}_{y_{ö2}}$$

$$\bullet\ y_{ö1} = \frac{1}{\ell(D)} 2e^{-x} = \frac{1}{(3D+1)\underbrace{(D+1)}_{\text{sıfır oluyor}}} 2e^{-x} = \frac{1}{D+1}\left(\frac{1}{3D+1} 2e^{-x}\right)$$

$$= \frac{1}{D+1}\left(\frac{1}{3.(-1)+1} 2e^{-x}\right) = -\frac{1}{D+1} e^{-x}$$

$$= -e^{-x}\frac{1}{(D-1+1)} 1 = -e^{-x}\frac{1}{D} 1 = -e^{-x} x$$

$\Rightarrow y_{ö1} = -e^{-x} x$ bulunur.

• $y_{ö_2} = \frac{1}{L(D)} 1 = \frac{1}{(3D+1)(D+1)} 1 = \frac{1}{(3D+1)(D+1)} e^{0x}$

$$= \frac{1}{(3 \cdot 0+1)(0+1)} e^{0x} = 1$$

$\Rightarrow y_{ö_2} = 1$ bulunur.

$\Rightarrow y_{ö} = y_{ö_1} + y_{ö_2} = -e^{-x} x + 1$ olur.

Genel çözüm

$$y = y_h + y_ö = c_1 e^{-\frac{1}{3}x} + c_2 e^{-x} - e^{-x} x + 1$$

olarak bulunur.

Teorem 13: $L(D)y = B(x)$ denkleminde $B(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ şeklinde n. dereceden bir polinom olsun. Bu durumda bir özel çözüm

$$y_ö = \frac{1}{L(D)} B(x) = \frac{1}{D^k (1 \mp \varphi(D))} B(x) = \frac{1}{D^k} \frac{1}{1 \mp \varphi(D)} B(x)$$

$$= \frac{1}{D^k} \left(1 \pm \varphi(D) \mp (\varphi(D))^2 \pm (\varphi(D))^3 \mp \dots \right) B(x)$$

ile bulunur. Burada $\varphi(D)$ derecesi $\leq n$ olan bir polinom ve $\varphi(0) = 0$ şeklindedir. Sağ tarafta $B(x)$ n. dereceden bir polinom olduğundan $(n+1)$. ve daha yüksek türevler sıfır olduğundan ifade sonludur.

Örnek: $y'' + y = 3x^2 + 1$ denkleminin bir özel çözümünü bulunuz.

$$y_ö = \frac{1}{L(D)} (3x^2 + 1) = \frac{1}{D^2 + 1} (3x^2 + 1) = \frac{1}{1 + \underbrace{D^2}_{\varphi(D)}} (3x^2 + 1)$$

$\varphi(0) = 0$ oluyor.

$$= (1 - D^2 + (D^2)^2 - (D^2)^3 + \dots)(3x^2 + 1)$$

$$y_ö = 3x^2+1 - D^2(3x^2+1) + D^4(3x^2+1) - D^6(3x^2+1) - \dots$$

$$= 3x^2+1 - 6 + 0 + 0 + \dots$$

$$y_ö = 3x^2-5 \quad \text{olur.}$$

Örnek: $y'' + 3y' + 2y = 3x^2 - x + 1$ denkleminin bir özel çözümünü bulunuz.

$$y_ö = \frac{1}{f(D)}(3x^2-x+1) = \frac{1}{D^2+3D+2}(3x^2-x+1) = \frac{1}{1 + \underbrace{1+D^2+3D}_{\varphi(D)}}(3x^2-x+1)$$

$\varphi(0)=1$ olup bu yazım uygun değildir!!

$$y_ö = \frac{1}{D^2+3D+2}(3x^2-x+1) = \frac{1}{2\left(1+\frac{D^2+3D}{2}\right)}(3x^2-x+1) \qquad \varphi(D) = \frac{D^2+3D}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{D^2+3D}{2} + \left(\frac{D^2+3D}{2}\right)^2 - \dots\right)(3x^2-x+1)$$

$$= \frac{1}{2}\left(3x^2-x+1 - \frac{1}{2}(D^2+3D)(3x^2-x+1) + \frac{1}{4}(\cancel{D^4} + 6\cancel{D^3} + 9D^2)(3x^2-x+1) + \dots\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{3x^2-x+1 - \frac{1}{2}\{6+3.(6x-1)\} + \frac{1}{4}.9.6 + 0\right\} = \frac{1}{2}\{3x^2-10x+13\}$$

olur.

Teorem 14: $L(D)y = B(x)$ denkleminde $B(x) = \sin(ax+b)$ veya $B(x) = \cos(ax+b)$ olsun. Bu durumda L operatörü D^2 nin bir polinomu ve $L(-a^2) \neq 0$ olmak üzere

$$y_ö = \frac{1}{L(D^2)} \sin(ax+b) = \frac{1}{L(-a^2)} \sin(ax+b)$$

$$y_ö = \frac{1}{L(D^2)} \cos(ax+b) = \frac{1}{L(-a^2)} \cos(ax+b) \quad \text{ile bulunur.}$$

İspat: Teorem 10 da $L(D^2)\sin(ax+b) = L(-a^2)\sin(ax+b)$ olduğu gösterildi. Buradan

$$L^{-1}(D^2)\left(L(D^2)\sin(ax+b)\right) = L^{-1}(D^2)\left(L(-a^2)\sin(ax+b)\right)$$

$$\sin(ax+b) = L^{-1}(D^2)\left(L(-a^2)\sin(ax+b)\right)$$

$$\sin(ax+b) = L(-a^2)\frac{1}{L(D^2)}\sin(ax+b)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{L(D^2)}\sin(ax+b) = \frac{\sin(ax+b)}{L(-a^2)}, \quad L(-a^2) \neq 0 \text{ dır.}$$

$\cos(ax+b)$ için de benzer ispat yapılabilir.

Örnek: $(D^4+D^2+1)y = \sin x + 2\cos 2x$ denkleminin bir özel çözümünü bulunuz.

$$y_ö = \frac{1}{D^4+D^2+1}\left(\sin x + 2\cos 2x\right) = \underset{a=1}{\frac{1}{D^4+D^2+1}}\sin x + 2\cdot\underset{a=2}{\frac{1}{D^4+D^2+1}}\cos 2x$$

$$= \frac{1}{(-1)^2+(-1)+1}\sin x + 2\cdot\frac{1}{(-4)^2+(-4)+1}\cos 2x$$

$D^2 \longrightarrow -a^2$ yazılıyor

$$= \sin x + \frac{2}{13}\cos 2x$$

bulunur.

Örnek: $(D^3 - D^2 + 1)y = \sin x$ bir özel çözümünü bulunuz.

$$y_ö = \frac{1}{D^3 - D^2 + 1}(\sin x) = \frac{1}{\underset{-1}{\underbrace{D.D^2}} - \underset{-1}{\underbrace{D^2}} + 1}\sin x = \frac{1}{-D+2}\sin x$$

$$(2+D)$$

$$= \frac{2+D}{4 - \underset{-1}{\underbrace{D^2}}}\sin x = \frac{1}{5}(2+D)\sin x$$

$$= \frac{1}{5}\left\{2\sin x + D\sin x\right\} = \frac{2}{5}\sin x + \frac{1}{5}\cos x$$

özel çözümdür.

Sonuç: Teorem 14 de $\ell(-a^2)=0$ ise

$$\sin ax = \frac{1}{2i}\left(e^{iax} - e^{-iax}\right) \quad , \quad \cos ax = \frac{1}{2}\left(e^{iax} + e^{-iax}\right)$$

veya $\sin ax = \operatorname{Im}(e^{iax})$, $\cos ax = \operatorname{Re}(e^{iax})$

üstel formları ve Teorem 12 kullanılarak özel çözüm bulunur.

Örnek: $(D^2+1)y=\cos x$ denkleminin özel çözümünü bulunuz.

$$y_ö = \frac{1}{D^2+1}\cos x = \frac{1}{D^2+1}\frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{D^2+1}e^{ix} + \frac{1}{D^2+1}e^{-ix}\right)$$

$(\ell(-1^2)=0)$

$-i^2+1$

$-1+1=0$

$$= \frac{1}{2}\left\{ e^{ix}\frac{1}{(D+i)^2+1}1 + e^{-ix}\frac{1}{(D-i)^2+1}1 \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ e^{ix}\frac{1}{D^2+2Di}1 + e^{-ix}\frac{1}{D^2-2Di} \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ e^{ix}\frac{1}{D(D+2i)}e^{0x} + e^{-ix}\frac{1}{D(D-2i)}e^{0x} \right\}$$

$$y_\ddot{o} = \frac{1}{2}\left\{ e^{ix}\frac{1}{2iD}1 + e^{-ix}\frac{1}{(-2i)D}1 \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \frac{e^{ix}}{2i}x - \frac{e^{-ix}}{2i}x \right\} = \frac{x}{2}\left\{ \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \right\} = \frac{x}{2}\sin x$$

olarak bulunur.

Örnek: $(D^2+9)y = \sin 3x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$\ell(\lambda)=0 \Rightarrow \lambda^2+9=0 \Rightarrow \lambda = \mp 3i \Rightarrow y_h = c_1\cos 3x + c_2\sin 3x$$

dur.

$\ell(-a^2) = \ell(-3^2) = -9+9=0$ olduğundan

$$y_\ddot{o} = \frac{1}{D^2+9}\sin 3x = \frac{1}{D^2+9}\operatorname{Im}\left(e^{3ix}\right) = \operatorname{Im}\Big(\underbrace{\frac{1}{D^2+9}e^{3ix}}_{v(x) \text{ dersek}}\Big)$$

$$v(x) = \frac{1}{D^2+9} e^{3ix} = e^{3ix} \frac{1}{(D+3i)^2+9} 1 = e^{3ix} \frac{1}{D^2+6iD} 1$$

$$= e^{3ix} \frac{1}{D\underbrace{(D+6i)}_{f(0)\neq 0}} e^{0x} = e^{3i x} \frac{1}{6i\,D} 1 = \frac{e^{3i}}{6i} x$$

$$= \frac{x}{6} \frac{e^{3i}}{i} = \frac{-x}{6} i e^{3i} = \frac{-x}{6} i \{\cos 3x + i \sin 3x\}$$

$$= \frac{x}{6} \sin 3x - i \frac{x}{6} \cos 3x \qquad \text{"} i^2 = -1 \text{"}$$

$$y_ö = \operatorname{Im} v(x) = \operatorname{Im}\left(\frac{x}{6} \sin 3x - i \frac{x}{6} \cos 3x\right)$$

$\Rightarrow y_ö = \frac{-x}{6} \cos 3x$ bulunur.

$y = y_h + y_ö = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x - \frac{x}{6} \cos 3x$ olur.

Teorem 15: $\ell(D)y = B(x)$ denkleminde $B(x) = x f(x)$ olsun. Bu durumda özel çözüm

$$y_ö = \frac{1}{\ell(D)} x f(x) = x \frac{1}{\ell(D)} f(x) - \frac{\ell'(D)}{(\ell(D))^2} f(x)$$

ile bulunur.

Örnek: $(D^2+D+2)y = x\sin x$ denkleminin özel çözümünü bulunuz.

$\ell(D) = D^2+D+2$ için $\ell'(D) = 2D+1$ olur.

$B(x) = x\sin x$ için $f(x) = \sin x$ olup $x f(x)$ formundadır.

$$y_ö = \frac{1}{\ell(D)} x\sin x = x.\frac{1}{\underbrace{D^2}_{-1}+D+2}\sin x - \frac{2D+1}{(\underbrace{D^2}_{-1}+D+2)^2}\sin x$$

$$= x.\frac{1}{D+1}\sin x - \frac{2D+1}{(D+1)^2}\sin x$$

$(D-1)$

$\underbrace{D^2}_{-1}+2D+\cancel{1}$

$$y_o^{y} = x \cdot \frac{D-1}{\underset{-1}{\underset{\sim}{D^2}}-1} \sin x - \frac{2D+1}{2D} \sin x$$

$$= -\frac{x}{2}(D-1)\sin x - \frac{1}{2}(2D+1).(-\cos x)$$

$$= -\frac{x}{2}\left\{D\sin x - \sin x\right\} + D(\cos x) + \frac{1}{2}\cos x$$

$$= -\frac{x}{2}\left\{\cos x - \sin x\right\} - \sin x + \frac{1}{2}\cos x$$

olarak bulunur.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Dr. Öğretim Üyesi Fatma HIRA