



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



1

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Diferansiyel Denklemler II

Dr. Öğretim Üyesi Fatma HIRA

Ders 4

Uygulama 2-

① $y''' = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$\chi(\lambda) = \lambda^3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \quad \text{dup genel çözüm}$$

$$y = c_1 e^{0x} + c_2 x e^{0x} + c_3 x^2 e^{0x} \Rightarrow y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 \quad \text{dur.}$$

② $4y''' - 5y' = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$\chi(\lambda) = 4\lambda^3 - 5\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(4\lambda^2 - 5) = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \quad 4\lambda^2 - 5 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow \lambda = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_3 = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Çeçlinde reel ve farklı kökler vardığından genel çözüm

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + c_3 e^{\lambda_3 x}$$

$$y = c_1 + c_2 e^{\frac{\sqrt{5}}{2}x} + c_3 e^{-\frac{\sqrt{5}}{2}x} \quad \text{bulunur.}$$

③ $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$l(\lambda) = \lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = 0 \Rightarrow (\lambda^2 + 4)^2 = 0$$

$$\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -4 \Rightarrow \lambda = \pm 2i$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 2i$, $\lambda_3 = \lambda_4 = -2i$ kompleks köklü kök

vardır. Bu durumda genel çözüm $(\alpha = 0, \beta = 2 \text{ i sin})$

$$y = e^{\alpha x} \{ (c_1 + c_2 x) \cos \beta x + (c_3 + c_4 x) \sin \beta x \}$$

$$y = (c_1 + c_2 x) \cos 2x + (c_3 + c_4 x) \sin 2x \quad \text{olur.}$$

④ $y^{(5)} - 12y''' + 16y'' = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$l(\lambda) = \lambda^5 - 12\lambda^3 + 16\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda^3 - 12\lambda + 16) = 0$$

$\lambda^3 - 12\lambda + 16 = 0$ in bir kökü $\lambda = 2$ olduğundan

$$\lambda^2(\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda - 8) = 0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda - 2)(\lambda + 4)(\lambda - 2) = 0 \quad \text{yazılırsa}$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 2$, $\lambda_5 = -4$ için genel çözüm

$$y = c_1 + c_2 x + (c_3 + c_4 x)e^{2x} + c_5 e^{-4x} \quad \text{bulunur.}$$

④ $y^{(4)} - 5y''' + 6y'' + 4y' - 8y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$\chi(\lambda) = \lambda^4 - 5\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda - 8 = 0$$

$\lambda = -1$ denklemin sağbağından $(\lambda + 1)$ çarpanlarından biridir.

$$\begin{array}{r|l} \lambda^4 - 5\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda - 8 & \lambda + 1 \\ \hline \cancel{\lambda^4} + \lambda^3 & \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 \end{array}$$

$$-6\lambda^2 + 6\lambda^2 + 4\lambda - 8$$

$$\pm 6\lambda^3 \pm 6\lambda^2$$

$$12\lambda^2 + 4\lambda - 8$$

$$\mp 12\lambda^2 \mp 12\lambda$$

$$-8\lambda - 8$$

$$\underline{-8\lambda - 8}$$

0

$$\lambda^4 - 5\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda - 8 = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8) = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda - 2)^3 = 0$$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 2$$

$$y_1 = e^{-x}, y_2 = e^{2x}, y_3 = xe^{2x}, y_4 = x^2e^{2x}$$

üçer bağımsız çözümler olarak üzere genel çözüm

$$y = c_1 e^{-x} + (c_2 + c_3 x + c_4 x^2) e^{2x}$$

olarak bulunur.

⑤ $y^{(4)} - 3y''' + 3y'' - y' = 0$, $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = y'''(0) = 1$
 Koşullarını sağlayan çözümleri bulunuz.

$$l(\lambda) = \lambda^4 - 3\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda = 0$$

$$\Rightarrow \lambda(\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 1)^3 = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$ olmak üzere genel çözüm

$$y = c_1 + (c_2 + c_3x + c_4x^2)e^x \text{ şeklindedir.}$$

• $y(0) = 0 \Rightarrow 0 = c_1 + c_2$

$$y' = e^x(c_2 + c_3x + c_4x^2) + e^x(c_3 + 2c_4x) = e^x(c_2 + c_3 + x(c_3 + 2c_4) + c_4x^2)$$

• $y'(0) = 0 \Rightarrow 0 = c_2 + c_3$

$$y'' = e^x(c_2 + c_3 + x(c_3 + 2c_4) + c_4x^2) + e^x(c_3 + 2c_4 + 2c_4x)$$

$$y'' = e^x\{c_2 + 2c_3 + 2c_4 + x(c_3 + 4c_4) + c_4x^2\}$$

• $y''(0) = 1 \Rightarrow 1 = c_2 + 2c_3 + 2c_4$

$$y''' = e^x\{c_2 + 2c_3 + 2c_4 + x(c_3 + 4c_4) + c_4x^2\} + e^x\{c_3 + 4c_4 + 2c_4x\}$$

$$y''' = e^x\{c_2 + 3c_3 + 6c_4 + x(c_3 + 6c_4) + c_4x^2\}$$

$$\bullet y'''|_{01} = 1 \Rightarrow 1 = c_2 + 3c_3 + 6c_4$$

$$a + c_2 = 0$$

$$c_2 + c_3 = 0$$

$$c_2 + 2c_3 + 2c_4 = 1$$

$$c_2 + 3c_3 + 6c_4 = 1$$

$$c_1 = 2$$

$$c_2 = -c_3 \Rightarrow c_2 = -2$$

$$-7c_3 + 2c_4 = 1$$

$$2c_3 + 6c_4 = 1$$

$$2c_4 = -1 \Rightarrow c_4 = -\frac{1}{2}$$

$$c_3 = 2$$

$$\Rightarrow y = a + (c_2 + c_3x + c_4x^2)e^x$$

$$\Rightarrow y = 2 + (-2 + 2x - \frac{1}{2}x^2)e^x \quad \text{ist kein beliebiges}$$

dur.

⑥ $y''' + y = 0$ denkleminin $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$ koşullarını sağlayan çözümlerini bulunuz.

$l(\lambda) = \lambda^3 + 1 = 0$ $\lambda = -1$ denklemini sağladığı için $(\lambda + 1)$ çarpanlarından biridir. Polinom bölmesi yapılırsa diğer çarpan $\lambda^2 - \lambda + 1$ bulunur. O halde

$$\lambda^3 + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda + 1) = 0 \text{ olur.}$$

$\lambda_1 = -1$ reel kök $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$ olduğundan kompleks kök vardır. $\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$, $\lambda_3 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ olur.

$$y = c_1 e^{-x} + e^{\frac{1}{2}x} \left\{ c_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right\} \text{ genel çözümdür.}$$

$$y' = -c_1 e^{-x} + \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x} \left\{ c_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right\} + e^{\frac{1}{2}x} \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2} c_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2} c_3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x \right\}$$

$$y'' = c_1 e^{-x} + \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x} \left\{ (c_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} c_3) \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + (c_3 - \frac{\sqrt{3}}{2} c_2) \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right\} \\ + e^{\frac{1}{2}x} \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2} (c_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} c_3) \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2} (c_3 - \frac{\sqrt{3}}{2} c_2) \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x \right\}$$

$$y|_0 = 0 \Rightarrow 0 = c_1 + c_2$$

$$y'|_0 = 0 \Rightarrow 0 = -c_1 + \frac{c_2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} c_3$$

$$y''|_0 = 1 \Rightarrow 1 = c_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{c_2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} c_3 \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{c_3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} c_2 \right)$$

Buradan c_1, c_2, c_3 bilinmeyenleri gözetilirse

$c_1 = \frac{1}{3}$, $c_2 = -\frac{1}{3}$, $c_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ olarak bulunur. Buraya
de istenen özel çözümü

$$y = \frac{1}{3} e^{-x} + e^{\frac{1}{2}x} \left\{ -\frac{1}{3} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right\}$$

olarak bulunur.

7) $y^{(4)} + 2y''' + by'' + 2y' + 5y = 0$ denkleminin lineer bağımsız çözümlerinden biri $y_1 = \sin x$ olduğuna göre, diğer lineer bağımsız çözümleri ve genel çözümleri bulunuz.

$y_1 = \sin x$ olduğuna göre $y_2 = \cos x$ lineer bağımsız çözümler olup karakteristik denklemin kompleks eşlenik kökleri $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$ şeklindedir. O halde karakteristik denklemin çarpanlarından biri $(\lambda - i)(\lambda + i) = \lambda^2 + 1$ olur. Polinom bölmesi yapılırsa

$$f(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + b\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$

$$(\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 5) = 0 \quad \text{dur.}$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16 \Rightarrow \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = -1 \pm 2i$$

diğer kompleks eşlenik köklendir. O halde lineer bağımsız çözümler $y_1 = \sin x, y_2 = \cos x, y_3 = e^{-x} \sin 2x, y_4 = e^{-x} \cos 2x$ olmak üzere genel çözümler

$$y = c_1 \sin x + c_2 \cos x + e^{-x} \{ c_3 \sin 2x + c_4 \cos 2x \} \quad \text{dur.}$$

8) Onuncu mertebeden $l(D)y=0$ denkleminin karakteristik denkleminin kökleri $\{4, 4, 4, 4, 2+3i, 2-3i, 2+3i, 2-3i, 2+3i, 2-3i\}$ olduğuna göre genel çözümü bulunuz.

$\lambda = 4$, 4 katlı reel kök

$\lambda = 2 \pm 3i$, 3 katlı kompleks eşlenik kök olduğundan
genel çözüm

$$y = (c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3)e^{4x} + e^{2x} \left\{ (c_5 + c_6x + c_7x^2) \cos 3x + (c_8 + c_9x + c_{10}x^2) \sin 3x \right\}$$

şeklinde dir.



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Dr. Öğretim Üyesi Fatma HIRA