1

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Diferansiyel Geometri II

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 10

2

İki Yüzeyin Arakesiti Olan Eğrinin Bulunması

E^3 de M_1 yüzeyi $\varphi_1(x,y,z)=0$ ve M_2 yüzeyi de $\varphi_2(x,y,z)=0$ kartezyen denklemleri ile verilsin. Bu iki denklemin her ikisini de sağlayan $P=(x,y,z)$ noktaların geometrik yeri M_1 ve M_2 yüzeylerinin arakesit eğrisini verir. O halde M_1 ve M_2 nin arakesit eğrisini bulmak için

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y,z)=0 \\ \varphi_2(x,y,z)=0 \end{cases}$$

sistemi çözülmelidir. Sistemde iki denklem ve üç bilinmeyen var olduğundan sistemin çözümü bir t parametresine bağlı olacaktır. Sistem çözülürse

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$$

şeklinde t parametresine bağlı eğri denklemi elde edilir.

107

3

Tersine, $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ eğrisi verilsin. Bu eğriyi iki yüzeyin arakesiti

olarak yazalım. $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ denklemlerinden t parametresi yok

edilirse $f(x,y)=0$, $\begin{cases} y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ denklemlerinden t yok edilirse de

$g(x,y)=0$ denklemleri elde edilir. $f(x,y)=0$ ve $g(x,y)=0$ yüzey denklemleri olup verilen eğri bu iki yüzeyin arakesiti olur.

4

Örnek

$$\varphi_1(x,y,z) = x^2 - y + 1 = 0$$
$$\varphi_2(x,y,z) = 2x^2 - 2x - z = 0$$

yüzeylerinin arakesit eğrisini bulunuz.

Çözüm:

$x = t$ alınırsa $y = t^2+1$ ve $z = 2t^2 - 2t$ bulunur.

O halde arakesit eğrisi,

$$C \ldots \begin{cases} x = t \\ y = t^2+1 \\ z = 2t(t-1) \end{cases}$$

veya $\alpha(t) = (t, t^2+1, 2t(t-1))$ olur.

Örnek

$U_1(x,y,z)=x^2+y^2-4=0$ ve $U_2(x,y,z)=xz-y=0$ yüzeylerinin arakesit eğrisini bulunuz.

Çözüm:

$x=2\cos t$ alınırsa $y=2\sin t$ ve ikinci denklemden $z=\tan t$ olur. O halde arakesit eğrisi,

$$C\ldots\begin{cases} x=2\cos t\\ y=2\sin t\\ z=\tan t\end{cases}$$

veya $\alpha(t)=(2\cos t, 2\sin t, \tan t)$ olur.

Örnek

$U_1(x,y,z)=e^{x/\sqrt{2}}-y=0$ ve $U_2(x,y,z)=e^{-x/\sqrt{2}}-z=0$ yüzeylerinin arakesit eğrisini bulunuz.

Çözüm:

$x=\sqrt{2}t$ alınırsa $y=e^t$ ve ikinci denklemden $z=e^{-t}$ bulunur. O halde arakesit eğrisi,

$$C\ldots\begin{cases} x=\sqrt{2}t\\ y=e^t\\ z=e^{-t}\end{cases}$$

veya $\alpha(t)=(\sqrt{2}t, e^t, e^{-t})$ dir.

Örnek

$\alpha: I \to E^3$, $\alpha(t)=(t,t^2,t^3)$ eğrisini iki yüzeyin arakesiti olarak yazınız.

Çözüm:

α eğrisini $C \ldots \begin{cases} x=t \\ y=t^2 \\ z=t^3 \end{cases}$ şeklinde yazabiliriz.

$x=t$ ve $y=t^2$ denklemlerinden $y=x^2$, buradan da $\varphi_1(x,y,z)=y-x^2=0$ yüzeyi elde edilir.

$y=t^2$ ve $z=t^3$ denklemlerinden $y^3=t^6$, $z=t^3$ buradan da $z^2=y^3$ bulunur. Böylece $\varphi_2(x,y,z)=y^3-z^2=0$ yüzeyi elde edilir.

O halde α eğrisi $\varphi_1(x,y,z)=y-x^2=0$ ve $\varphi_2(x,y,z)=y^3-z^2=0$ yüzeylerinin arakesitidir.

Örnek

$M_1=\{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1x_3-1=0\}$ ve $M_2=\{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1^2-x_2x_3=0\}$ yüzeylerinin arakesiti olarak verilen eğrinin $P=(1,?,?)$ noktasındaki teğetinin denklemini yazınız.

Çözüm:

$x_1=1$ için $P\in M_1$ olduğundan $x_3=1$ ve $P\in M_2$ olduğundan $x_2=1$ bulunur. O halde $P(1,1,1)$ olur.

M_1 in P deki normali: $\vec{\nabla} f_1|_P=(x_3,0,x_1)|_P=(1,0,1)$ ve

M_2 nin P deki normali: $\vec{\nabla} f_2|_P=(2x_1,-x_3,-x_2)|_P=(2,-1,-1)$

olup α eğrisinin teğeti T ise eğri her iki yüzeye de ait olduğundan $T\perp\vec{\nabla} f_1|_P$ ve $T\perp\vec{\nabla} f_2|_P$ dir. O halde

$$T=\vec{\nabla} f_1|_P\times\vec{\nabla} f_2|_P \text{ alınabilir.}$$

$\Rightarrow T=(1,3,-1)$ olur.

O halde teğet doğrusu $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{-1}=\lambda$ bulunur.

9

Örnek

$\mathcal{U}_1(x,y,z) = xz-1=0$ ve $\mathcal{U}_2(x,y,z) = x-yz=0$ yüzeylerinin $P=(1,?,?)$ noktasında hangi açı altında kesiştiğini bulunuz.

Çözüm:

İki yüzey arasındaki açı, bu yüzeylerin normal vektörleri arasındaki açıdır. $\mathcal{U}_1$ in P deki normali: $N_1 = \vec{\nabla} f_1|_P = (z,0,x)|_P$ ve $P=(1,1,1)$ olup $N_1=(1,0,1)$ dir. $\mathcal{U}_2$ nin P deki normali; $N_2 = \vec{\nabla} f_2|_P = (1,-z,-y)|_P$ buradan $N_2=(1,-1,-1)$ dir. N_1 ve N_2 arasındaki açıyı bulalım: açı θ olsun. O halde,

$$\langle N_1, N_2 \rangle = \|N_1\| . \|N_2\| . \cos\theta$$

$$\Rightarrow 0 = \sqrt{2} . \sqrt{3} . \cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \text{ olur.}$$

O halde M_1 ve M_2 yüzeyleri P noktasında diktir.

114

10

Örnek

$M_1 = \{(x_1,x_2,x_3)\in E^3 \mid x_1^2+x_2^2=4\}$ ve $M_2 = \{(x_1,x_2,x_3)\in E^3 \mid x_1^2-x_2^2-2x_3=0\}$ yüzeylerinin arakesiti olan eğrinin $P=(\sqrt{3},1,?)$ noktasındaki Frenet vektörlerini bulunuz.

Çözüm:

$x_2 = 2\cos t$ alınırsa $x_1 = 2\sin t$ ve $x_3 = 2\cos 2t$ olur. O halde arakesit eğrisi: $\alpha: I \to E^3$, $\alpha(t) = (2\cos t, 2\sin t, 2\cos 2t)$ bulunur.

$P=(\sqrt{3},1,1)$ olup bu nokta $t=\frac{\pi}{6}$ değerine karşılık gelir.

$\alpha'(t) = (-2\sin t, 2\cos t, -4\sin 2t)$ olup $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{4+16\sin^2 2t}$ dir.

O halde t yay-par. değildir.

$$T\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\alpha'(\pi/6)}{\|\alpha'(\pi/6)\|}, \quad \|\alpha'(\pi/6)\| = 4$$

$$\Rightarrow T(\pi/6) = \left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

11

$\alpha'(t) = (-2\sin t, 2\cos t, -4\sin 2t) \Rightarrow \alpha'(\pi/6) = (-1, \sqrt{3}, -2\sqrt{3})$

$\alpha''(t) = (-2\cos t, -2\sin t, -8\cos 2t) \Rightarrow \alpha''(\pi/6) = (-\sqrt{3}, -1, -4)$

$\Rightarrow \alpha'(\pi/6) \times \alpha''(\pi/6) = (-6\sqrt{3}, 2, 4)$, $\|\alpha'(\pi/6) \times \alpha''(\pi/6)\| = 4\sqrt{7}$

$$\Rightarrow B\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\alpha'(\pi/6) \times \alpha''(\pi/6)}{\|\alpha'(\pi/6) \times \alpha''(\pi/6)\|} = \left(-\frac{3\sqrt{21}}{14}, \frac{\sqrt{7}}{14}, \frac{\sqrt{7}}{7}\right)$$

$N(\pi/6) = B(\pi/6) \times T(\pi/6) = \left(-\frac{\sqrt{21}}{14}, -\frac{5\sqrt{7}}{14}, -\frac{\sqrt{7}}{7}\right)$ bulunur.

12

Uzay Eğrilerinin Koordinat Düzlemleri Üzerindeki İzdüşümleri

Bir (C) eğrisi $U_1(x,y,z)=0$ ve $U_2(x,y,z)=0$ yüzeylerinin arakesit eğrisi olarak verilsin. Yani

$$(C) \ldots \begin{cases} U_1(x,y,z)=0 \\ U_2(x,y,z)=0 \end{cases}$$

olsun.

$\begin{cases} U_1(x,y,z)=0 \\ U_2(x,y,z)=0 \end{cases}$ sisteminden z yok edilirse x ve y ye bağlı

$\Phi_1(x,y)=0$ denklemi bulunur. Bu denklem xoy koordinat düzleminde bir eğri tanımlar. Bu eğri (C) nin xoy $(z=0)$ düzlemi üzerindeki izdüşüm eğrisidir.

Benzer şekilde yukarıdaki sistemden x ve y yok edilirse (C) eğrisinin yoz ve xoz koordinat düzlemlerindeki izdüşümleri elde edilir.

13

Örnek

$$(c)\ldots\begin{cases}\varphi_1(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-9=0\\ \varphi_2(x,y,z)=x^2-y^2+z-4=0\end{cases}$$ eğrisinin koordinat düzlemleri üzerindeki izdüşümlerini bulunuz.

Çözüm:

* xoy üzerindeki izdüşüm: Yukarıdaki sistemden z yi yok etmeliyiz.

$$x^2-y^2+z-4=0 \Rightarrow z=4-x^2+y^2$$

$$\Rightarrow \phi(x,y)=x^2+2y^2+3(4-x^2+y^2)^2-9=0$$

* xoz üzerindeki izdüşüm: Yukarıdaki sistemden y yi yok etmeliyiz.

$$\begin{array}{l} x^2+2y^2+3z^2-9=0\\ + \quad 2x^2-2y^2+2z-8=0\\ \hline f(x,z)=3x^2+3z^2+2z-17=0\end{array}$$

14

* yoz üzerindeki izdüşüm: Yukarıdaki sistemden x i yok etmeliyiz.

$$\begin{array}{l} x^2+2y^2+3z^2-9=0\\ + \quad -x^2+y^2-z+4=0\\ \hline 3y^2+3z^2-z-5=0\end{array}$$ olur.

Not:

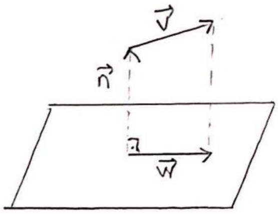
$$(c)\ldots\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$$ şeklinde verilmiş ise (c) nin xoy üzerindeki izdüşümü $\alpha(t)=(x(t),y(t),0)$ eğrisi, xoz üzerindeki izdüşümü $\beta(t)=(x(t),0,z(t))$ eğrisi ve yoz üzerindeki izdüşümü de $\gamma(t)=(0,y(t),z(t))$ eğrisidir.

15

Açıklama: Bir $\vec{v}$ vektörünün normal vektörü $\vec{n}$ olan bir düzlem üzerindeki izdüşüm vektörü,

$$\vec{w} = \vec{v} - \frac{\langle \vec{v},\vec{n}\rangle}{\langle \vec{n},\vec{n}\rangle}\vec{n} \quad \text{dir.}$$

İspat:



$\vec{w} = \vec{v} + \lambda\vec{n}$ yazalım. Eşitliğin her iki yanını $\vec{n}$ ile iç çarpalım

$$\Rightarrow \underbrace{\langle \vec{w},\vec{n}\rangle}_{0} = \langle \vec{v},\vec{n}\rangle + \lambda\langle \vec{n},\vec{n}\rangle$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{\langle \vec{w},\vec{n}\rangle}{\langle \vec{n},\vec{n}\rangle} \quad \text{olur.}$$

$$\Rightarrow \vec{w} = \vec{v} - \frac{\langle \vec{v},\vec{n}\rangle}{\langle \vec{n},\vec{n}\rangle}\vec{n} \quad \text{bulunur.}$$

16

Buna göre $(c) \ldots \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ eğrisinin xoy üzerindeki izdüşüm eğrisini bulalım: $\vec{v} = (x(t), y(t), z(t))$ vektörünün $z=0$ düzlemi üzerine olan izdüşüm vektörünü bulmalıyız:

$\vec{n} = (0,0,1)$ olup $\langle \vec{n},\vec{n}\rangle = 1$ dir.

$$\Rightarrow \vec{w} = \vec{v} - \frac{\langle \vec{v},\vec{n}\rangle}{\langle \vec{n},\vec{n}\rangle}\vec{n}$$

$$= (x(t), y(t), z(t)) - z(t)(0,0,1)$$

$$= (x(t), y(t), 0) \quad \text{olur.}$$

O halde (c) nin xoy üzerindeki izdüşüm eğrisi $\alpha(t) = (x(t), y(t), 0)$ dır.

Örnek

$(C) \ldots \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases}$ eğrisinin koordinat düzlemleri üzerindeki izdüşümlerini bulunuz.

Çözüm:

xoy deki izdüşümü, $\alpha(t) = (t, t^2, 0)$ olup denklemi $y = x^2$ dir.

xoz deki izdüşümü, $\beta(t) = (t, 0, t^3)$ olup denklemi $z = x^3$ dür.

yoz deki izdüşümü, $\gamma(t) = (0, t^2, t^3)$ olup denklemi $y^3 = z^2$ dir.

Örnek

$(C) \ldots \begin{cases} xy + xz + yz = 2 \\ xy - 2xz + 3y = 6 \end{cases}$

eğrisinin xoz üzerindeki izdüşümünü bulunuz.

Örnek

$\alpha(t) = (t, t^2, t-1)$ eğrisinin $x - y + z - 2 = 0$ düzlemi üzerindeki izdüşüm eğrisini bulunuz.

Çözüm:

Düzlemin normali $\vec{n} = (1, -1, 1)$ olup $\langle \vec{n}, \vec{n} \rangle = \sqrt{3}$ dir.

$\vec{w} = \vec{v} - \dfrac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{\langle \vec{n}, \vec{n} \rangle} \vec{n}$ denkleminde $\vec{v}$ yerine $\alpha(t)$ alınırsa,

$\vec{w} = \vec{\alpha(t)} - \dfrac{\langle \vec{\alpha(t)}, \vec{n} \rangle}{\langle \vec{n}, \vec{n} \rangle} \vec{n}$ olur. $\langle \vec{\alpha(t)}, \vec{n} \rangle = -t^2 + 2t - 1$

$\Rightarrow \vec{w} = (t, t^2, t-1) - \frac{1}{\sqrt{3}}(-t^2 + 2t - 1)(1, -1, 1)$

$\Rightarrow \beta(t) = \left(t - \frac{1}{\sqrt{3}}(-t^2 + 2t - 1),\ t^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}(-t^2 + 2t - 1),\ t - 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}(-t^2 + 2t - 1) \right)$

olur.

123

19

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Diferansiyel Geometri II

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 10