



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Dijital Ders Platformu

Fonksiyon serilerinin düzgün
yakınsaklığı- Weierstrass-M testi,
İntegralleme ve türevleme

Prof. Dr. Cenap DUYAR

Ders 9

limitinin varlığını belirtir. Ama $x \neq c$ için

$$G(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

elde ederiz. Bundan dolayı

$$G(c) = \lim_{x \rightarrow c} G(x) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c)$$

olur ve buna göre $f'(c)$ türevi var olup, $f'(c) = G(c)$ dir.
Öte yandan

$$G(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(c) = g(c)$$

dir ve bundan dolayı $f'(c) = g(c)$ olur. c noktası (a, b) den keyfi seçildiği için bu (b) yi ispatlar.

Fonksiyon Serilerinin Düzgün Yakınsaklığı.

TANIM. Bir E kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonların bir (f_n) dizisi verilsin. Her bir $x \in E$ için,

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x), \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

olsun. Eğer her bir $x \in E$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$$

limiti varsa

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

fonksiyon serisinin 'noktasal yakınsak' olduğu söylenir ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f_k(x)$$

yazılır. Böylece dərma $(S_n(x))$ kısmi toplaqlar dizisini

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$$

olaraq tanımlarız. Böylece

$S_1(x) = f_1(x)$, $S_2(x) = f_1(x) + f_2(x)$, $S_3(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots$ dir və eğer x nöqtəsi için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$$

limiti varsa, o zaman

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$$

serisinin x nöqtəsində yakınsaktır. Eğer hər bir $x \in E$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$$

-116-

limiti varsa, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ serisi E üzerinde noktasal yakınsar.

Bu tanıma göre eğer $f_k(x)$ fonksiyonlarının hepsi E üzerinde sürekli ve $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x) \rightarrow S(x)$ (düzgün) ise, o zaman $S(x)$ sürekli'dir.

Bir fonksiyon serisinin bir limit fonksiyonuna düzgün yakınsayıp yakınsamadığına karar vermenin etkili bir yolunu bilmeyi isteriz. Düzgün yakınsama tanımını fonksiyonların bir sonsuz toplamına uygulamak hiçte kolay değildir, bu yüzden başka bir yöntem istenmektedir. Uygun sonuç Weierstrass'ın Majörant Teoremi'dir (Weierstrass-M testi'dir).

Teorem 28 (Weierstrass-M Testi). $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ fonksiyon serisinin bir I aralığı üzerinde tanımlanmış olduğunu ve her $x \in I$ için $k \in \mathbb{N}$ için

$$|f_k(x)| \leq M_k, k=1,2,\dots$$

-116-

limiti varsa, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ serisi E üzerinde noktasal yakınsar.

Bu tanıma göre eğer $f_k(x)$ fonksiyonlarının hepsi E üzerinde sürekli ve $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x) \rightarrow S(x)$ (düzgün) ise, o zaman $S(x)$ sürekli'dir.

Bir fonksiyon serisinin bir limit fonksiyonuna düzgün yakınsayıp yakınsamadığına karar vermenin etkili bir yolunu bilmeyi isteriz. Düzgün yakınsama tanımını fonksiyonların bir sonsuz toplamına uygulamak hiçte kolay değildir, bu yüzden başka bir yöntem istenmektedir. Uygun sonuç Weierstrass'ın Majörant Teoremi'dir (Weierstrass-M testi'dir).

Teorem 28 (Weierstrass-M Testi). $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ fonksiyon serisinin bir I aralığı üzerinde tanımlanmış olduğunu ve her $x \in I$ için $k \in \mathbb{N}$ için

$$|f_k(x)| \leq M_k, k=1,2,\dots$$

-117-

olacak şekilde pozitif sabitlerin bir (M_k) dizisinin var olduğunu kabul edelim. Eğer

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_k$$

yakınsak ise, o zaman

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

fonksiyon serisi I üzerinde düzgün yakınsaktır.

İspat. Eğer $\forall x \in I$ için $|f_k(x)| \leq M_k, (k=1, 2, \dots)$ olursa kullanılırsa

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$$

serisi $\forall x \in I$ için yakınsaktır, böylece

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

serisi $\forall x \in I$ için mutlak yakınsak ve dolayısıyla yakınsaktır. Bu $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ serisinin noktasak yakınsak olduğunu belirtir ve limiti $S(x)$ ile gösterebiliriz.

Teoremin koşulları altında $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ olmak üzere I üzerinde $S_n \rightarrow S$ (düzgün) olduğunu

gösterelim.

$$S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$$

• olur (tek yaptığımız şey seriden ilk 'n' tane terimi çıkarmaktır). O zaman $\forall x \in I$ için

$$|S(x) - S_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k$$

olduğu izlenir (kabulümüze göre $\forall x \in I$ için $|f_k(x)| \leq M_k, k=1,2,\dots$ olduğu için). Zira $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ serisinin yakınsak olduğunu kabulümüzden biliyoruz, böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k = 0$$

olmaktadır. O halde $\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde $\forall n \geq N$ ve $\forall x \in I$ için

$$|S_n(x) - S(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k < \varepsilon$$

olacak şekilde $\exists N \in \mathbb{N}$ bulabiliriz, bu da $S_n \rightarrow S$ (düzgün) olduğunu gösterir.

SONUÇ. Eğer $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ fonksiyon serisi I üzer-

-119-

rinde düzgün yakınsak ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için f_k fonksiyonları I üzerinde sürekli ise, o zaman $S(x)$ limit fonksiyonda I üzerinde sürekli dir.

İspat. Sürekli fonksiyonların bir sonlu toplamıda bir sürekli fonksiyon olduğundan, $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$$

kısmi toplamaları süreklidir. $S_n \rightarrow S$ (düzgün) kabul edildiğinden $S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$ bir sürekli fonksiyon olur.

ÖRNEK. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^2}$ fonksiyon serisinin $\mathbb{R}$ üzerinde bir sürekli fonksiyon olduğunu gösterelim:

$\forall t \in \mathbb{R}$ için $|\sin t| \leq 1$ olduğundan, $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$|f_k(x)| = \left| \frac{\sin kx}{k^2} \right| = \frac{|\sin kx|}{k^2} \leq \frac{1}{k^2}, (\forall k \in \mathbb{N})$$

elde ederiz.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

-10-

serisinde yakınsak olduğunu biliyoruz ($p=2 > 1$ olduğundan). O zaman Weierstrass-M testine göre

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^2}$$

serisi $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsaktır, böylece her $k \in \mathbb{N}$ için $f_k(x) = \frac{\sin kx}{k^2}$ fonksiyonlarının sürekli olmasından, $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^2}$ fonksiyonunun sürekli olduğu sonucuna ulaşılır.

NOT. Weierstrass-M testinin ifadesinde, M_k sabitlerinin nasıl bulunacağı hakkında hiçbir şey söylemedik. Genellikle

$$M_k = \sup_{x \in I} |f_k(x)|$$

alırız, ama bu zorunlu değildir.

Teorem 29. Eğer (i) $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ fonksiyon serisi I aralığı üzerinde düzgün yakınsak ve (ii) Her bir $k \in \mathbb{N}$ için $f_k(x)$ fonksiyonları I üzerinde sürekli ise, o zaman

-124-

 $\forall x, a \in I$ için

$$\int_a^x \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \right) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_a^x f_k(t) dt \right)$$

eşitliği gerçekleşir. Diğer bir deyişle, eğer I aralığı üzerinde sürekli fonksiyonların serisi düzgün yakınsak ise, o zaman toplam integrali, bir sonlu toplam durumundaki gibi fonksiyonların integrallerinin toplamıdır.

İspat. $f_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$ fonksiyonları I aralığı üzerinde sürekli ise $\forall n \in \mathbb{N}$ için $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ kısmi toplamları da I üzerinde sürekli'dir. $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ serisi I üzerinde düzgün yakınsak olduğuna göre I üzerinde $S_n \rightarrow f$ (düzgün) olacak şekilde bir f fonksiyonu vardır. O zaman S_n fonksiyonlarının I üzerinde düzgün yakınsak olması isteneni verir. *

Aynı zamanda fonksiyon dizileri için benzer teoremi kullanarak $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ serisinin diferansiyellenebilirliği hakkında birşey söyleyebiliriz.

-122-

Bu durumda önceki iki teoremdaki gibi, $S_n(t)$ ile $f_n(x)$ ve $S(t)$ ile $f(x)$ yer değiştirebilir. Tek ihtiyacımız olan şey, bu gereklilikleri formülleştirmek ve aşağıdaki gibi sonuçlandırmaktır.

Teorem 30. $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ fonksiyon serisi I üzerinde (i) $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ noktasal yakınsak, (ii) $\sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$ düzgün yakınsak ve (iii) her bir k için $f_k(x)$ sürekli diferansiyellenebilir olmak üzere üç koşulu sağlarsa, o zaman $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ sürekli diferansiyellenebilir ve

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$$

olur.

HATIRLATMA (Supremum ve infimum).

TANIM. $A \subset \mathbb{R}$ olsun. $\sup A$ (veya $\text{eküs} A$) ile gösterilen A nın supremumu (veya en küçük üst sınırı), $\forall x \in A$

-123-

için $x \leq a$ olması özelliğine sahip, en küçük $a \in \mathbb{R}$ sayısı olarak tanımlanır. Matematiksel olarak kısaltma ile

$$\sup A = \min \{a \in \mathbb{R} : \forall x \in A \text{ için } x \leq a\}$$

yazabiliriz.

Benzer şekilde A 'nın infimumu (en büyük alt sınırı) $\inf A$ (veya $\text{ebas } A$) ile gösterilir ve $\forall x \in A$ için $x \geq b$ olması özelliğine sahip, en büyük $b \in \mathbb{R}$ sayısı olarak tanımlanır. Kısaca

$$\inf A = \max \{b \in \mathbb{R} : \forall x \in A \text{ için } x \geq b\}$$

yazabiliriz.

Bu tanımlardaki infimum ve supremumun A kümesine ait olmalarının gerekmediği not edelim.

ÖRNEK. (i) $A = [-2, 3] \subset \mathbb{R}$ için $\sup A = 3$, $\inf A = -2$ dir ve her ikisinde A ya aittir.

(ii) $A = (-2, 3] \subset \mathbb{R}$ için $\sup A = 3$, $\inf A = -2$ dir, ama sadece $\sup A$ değeri A ya aittir.

(iii) $A = (-2, 3)$ için $\sup A = 3$, $\inf A = -2$ dir, hem $\sup A$ hemde

-124-

$\inf A$ değeri A ya ait değildir.

(iv) $A = [-2, \infty) \subset \mathbb{R}$ için $\inf A = -2$ iken $\sup A$ değeri yoktur.

TANIM. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $A \subset \mathbb{R}$ üzerinde $f(x)$ fonksiyonunun supremumu $\forall x \in A$ için $f(x) \leq a$ olması özelliğine sahip en küçük $a \in \mathbb{R}$ sayısıdır. Kısaca

$$\sup_{x \in A} f(x) = \min \{a \in \mathbb{R} : \forall x \in A \text{ için } f(x) \leq a\}$$

yazabiliriz.

Benzer şekilde A üzerinde $f(x)$ in infimumu $\forall x \in A$ için $f(x) \geq b$ olması özelliğine sahip, en büyük $b \in \mathbb{R}$ sayısıdır. Kısaca

$$\inf_{x \in A} f(x) = \max \{b \in \mathbb{R} : \forall x \in A \text{ için } f(x) \geq b\}$$

yazabiliriz.

ÖRNEK. (i) $f(x) = x^3$ ve $A = [-1, 3]$ olsun. $f(x)$ fonksiyonu kesin artan olduğundan, $\sup_{x \in A} f(x) = 27$ ve $\inf_{x \in A} f(x) = -1$ dir.

(ii) $f(x) = x^2$ ve $A = [-1, 3]$ olsun. $f(x)$ fonksiyonu A üzerinde

-125-

kesin monoton değildir. Bu fonksiyon $[-1,0]$ üzerinde kesin azalan ve $[0,3]$ üzerinde kesin artandır. Böylece

$$\sup_{x \in [-1,0]} f(x) = 1, \inf_{x \in [-1,0]} f(x) = 0$$

ve

$$\sup_{x \in [0,3]} f(x) = 9, \inf_{x \in [0,3]} f(x) = 0$$

elde ederiz. Bu iki gözlemi birleştirerek,

$$\sup_{x \in [-1,3]} f(x) = 9, \inf_{x \in [-1,3]} f(x) = 0$$

buluruz.

(iii) $f(x) = \arctan x$ ve $A = \mathbb{R}$ olsun. Burada kesin artan bir fonksiyona sahibiz ve

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{\pi}{2}, \inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) = -\frac{\pi}{2}$$

elde ederiz.

Bir fonksiyonun bir aralık üzerinde supremum olarak en büyük değerini ve infimum için en küçük değeri almak caziptir. Son örnek ne supremum ne de infimumun bir fonksiyonun ulaştığı değerler olmasının gerekmediğini gösterir. Bununla birlikte aşağıdaki basit ama kullanışlı sonucu sahibiz.

Teorem 3.1. $f(x)$ kapalı ve sınırlı $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlanmış bir reel-değerli sürekli fonksiyon olsun. O zaman

$$\sup_{x \in [a, b]} f(x) = \max \{f(x) : x \in [a, b]\}, \inf_{x \in [a, b]} f(x) = \min \{f(x) : x \in [a, b]\}$$

olur. Yani bir kapalı ve sınırlı aralık üzerinde bir sürekli fonksiyonun supremumu onun bu aralık üzerindeki en büyük değerine eşittir ve infimumu aralık üzerinde fonksiyonun en küçük değeridir.

İspat. $f(x)$ sürekli ve aralık kapalı olduğu için, $f(x)$ aralık üzerinde bir en büyük ve bir en küçük değere sahiptir. Yani her $x \in [a, b]$ için $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ olacak şekilde $x_1, x_2 \in [a, b]$ vardır. Böylece

$$\sup_{x \in [a, b]} f(x) = f(x_2), \inf_{x \in [a, b]} f(x) = f(x_1)$$

olduğunu görürüz, bu isteneni verir.

Kuvvet Serileri

Bir kuvvet serisi a_n ler katsayı olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

biçiminde x değişkenine göre yazılmış bir seridir. Eğer a_n lerin sonlu tanesi dışında hepsi sıfırsa, o zaman kuvvet serisi bir polinom fonksiyonudur, ama eğer a_n lerin sonsuz tanesi sıfır değilse o zaman kuvvet serisinin yakınsaklığını düşünmeye gerek duyarız.

Temel gerçakler şunlardır: Her kuvvet serisi a_n katsayılarına bağlı olan $0 \leq R \leq \infty$ yakınsaklık yarıçapına sahiptir. Kuvvet serisi $|x| < R$ olan x noktalarında mutlak yakınsak, $|x| > R$ olduğunda ıraksaktır ve yakınsama $0 \leq \rho < R$ olmak üzere her $|x| < \rho$ aralığında düzgündür. Eğer $R > 0$ ise, kuvvet serisinin toplamı $|x| < R$ olan x noktalarında sonsuz diferansiyel-



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Cenap DUYAR

Analiz III

Fonksiyon serilerinin düzgün yakınsaklığı- Weierstrass-M testi, integralleme ve türevleme

Ders 9