



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Dijital Ders Platformu

Fonksiyon dizi ve serileri- Düzgün Yakınsaklık,
Düzgün yakınsama ve süreklilik, Düzgün
yakınsama ve Riemann integrallenebilirlik,
Düzgün yakınsama ve türevlenebilirlik

Prof. Dr. Cenap DUYAR

Ders 8

Fonksiyon Dizisi ve Serileri.

TANIM: $\forall n=1,2,\dots$ için $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$, ($E \subset \mathbb{R}$) fonksiyonları verildiğinde (f_n) ye bir 'fonksiyon dizisi' denir. $\forall x \in E$ için $(f_n(x))$ bir reel sayı dizisi olmaktadır. Eğer $\forall x \in E$ için $(f_n(x))$ dizisi yakınsak ise

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

olarak bir f fonksiyonu tanımlayabiliriz.

Bu durumda (f_n) dizisinin 'E üzerinde yakınsak' olduğu söylenir ve f fonksiyonuna (f_n) dizisinin 'limiti' veya 'limit fonksiyonu' denir.

NOT, Ortaya çıkan temel problem yukarıda zikredilen limit işlemi altında fonksiyonların önemli özelliklerinin (süreklilik ve integrelenebilir gibi) korunup korunup

-97-

korunma özünü belirlemektir.

TANIM (Noktasal ve Düzgün Yakınsama).

(f_n) bir $E \subset \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların dizisi olsun

Eğer sabit bir $x_0 \in E$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0)$ limiti var ve sonlu ise (f_n) dizisi ' x_0 noktasında yakınsaktır' denir. O zaman $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = l \in \mathbb{R}$
 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ verildiğinde $\forall n \geq N$ için $|f_n(x_0) - l| < \varepsilon$ olacak şekilde $\exists N \in \mathbb{N}$ var, yazabiliriz.

Eğer (f_n) dizisi $\forall x \in E$ noktasında yakınsak ise, (f_n) dizisinin ' E üzerinde noktasal yakınsak' olduğu söylenir.

Eğer $\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde $\forall n \geq N$ ve $\forall x \in E$ için

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ bulunabilirse, (f_n) dizisinin $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna 'düzgün yakınsadığı'

söyleyin.

Teorem 21. (Cauchy düzgün yakınsaklık kriteri). E üzerinde tanımlı fonksiyonların bir (f_n) dizisi, E üzerinde düzgün yakınsaktır $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ verildiğinde $\forall m \geq N, \forall n \geq N$ ve $\forall x \in E$ için

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

olacak şekilde $\exists N \in \mathbb{N}$ vardır.

İspat. (f_n) fonksiyon dizisi E üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsasın. O zaman $\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde $\forall n \geq N$ ve $\forall x \in E$ için

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde $\exists N \in \mathbb{N}$ vardır. $\forall m > N$ olarak $\forall x \in E$ için

aynı zamanda $|f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ elde edebiliriz.

Böylece üçgen eşitsizliğinden, $\forall m \geq N, \forall n \geq N$ ve $\forall x \in E$ için

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde edilir.

Tersine Cauchy kriterinin sağlanmadığını kabul edelim. O zaman her bir $x \in E$ için $(f_n(x))$ reel sayı dizisi bir Cauchy dizisidir ve $\mathbb{R}$ de Cauchy dizileri yakınsak olduğundan her bir $x \in E$ için $(f_n(x))$ dizisi yakınsaktır. Şimdi $\forall x \in E$ için

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

olsun. Bu yakınsamanın düzgün olduğunu göstermeliyiz.

Cauchy kriterine göre $\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde $\forall n > N, k = 1, 2, \dots$ ve $\forall x \in E$ için

$$|f_n(x) - f_{n+k}(x)| < \varepsilon/2$$

olacak şekilde $\exists N \in \mathbb{N}$ vardır. Bundan dolayı $\forall x \in E$ için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_{n+k}(x)| = |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. Böylece $\forall n > N$ ve $\forall x \in E$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ yazılır. Bu E üzerinde $f_n \rightarrow f$ yakınsamasının düzgün olduğunu gösterir. #

-100-

Teorem 2.2. E üzerinde (f_n) fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna noktasal yakınlığını kabul edelim ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$M_n = \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)|$$

olsun. 0 zaman E üzerinde düzgün olarak $f_n \rightarrow f$ dir $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0$ dir.

İspat. E üzerinde $f_n \rightarrow f$ (düzgün) olsun. $\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde $\forall n \geq N$ ve $\forall x \in E$ için $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ ve dolayısıyla

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = M_n = |M_n - 0| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$$

olacak şekilde $\exists N \in \mathbb{N}$ vardır. Bu $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0$ olduğunu gösterir. Tersini aşıkardır.

ÖRNEK. $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$ olacak şekilde $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı fonksiyonların bir (f_n) dizisi verilsin. Bu dizinin noktasal $\mathbb{R}$ üzerinde

-109-
yakınsak, ama düzgün yakınsak olma-
dığını gösteriniz.

Çözüm, $|x| < 1$ olmak üzere $\forall x \in \mathbb{R}$ için
 $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}} \rightarrow 0$, $|x| = 1$ olduğunda $f_n(x) = \frac{1}{2}$
 ve $|x| > 1$ olmak üzere $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f_n(x) \rightarrow 1$ ol-
 duğu hemen görülebilir. Böylece

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0, & |x| < 1 \\ 1/2, & |x| = 1 \\ 1, & |x| > 1 \end{cases}$$

olmak üzere $f_n \rightarrow f$ (noktasal) olur.

Şimdi $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$M_n = \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in E} \left| \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}} - f(x) \right|$$

olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}} < 1$ olduğundan

$f(x) = 0$ ise $M_n = \sup_{|x| < 1} |f_n(x) - 0| = \frac{1}{2}$, $f(x) = 1/2$ ise

$M_n = \sup_{|x|=1} |f_n(x) - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$ ve $f(x) = 1$ ise $M_n = \sup_{|x| > 1} |f_n(x) - 1| = \frac{1}{2}$

olur. Yani $\forall n \in \mathbb{N}$ için $M_n = \frac{1}{2}$, dolayısıyla $M_n \rightarrow \frac{1}{2}$
 olur ki; son teoreme göre $f_n \rightarrow f$ yakınsaması düzgün olmaz.

Düzgün yakınsama ve Sınırlılık

Teorem 23. Eğer (f_n) , $E \subset \mathbb{R}$ üzerinde sınırlı fonksiyonların bir dizisi ve E üzerinde $f_n \rightarrow f$ (düzgün) ise, o zaman f fonksiyonu E üzerinde sınırlıdır.

İspat. $\varepsilon = 1$ olsun. E üzerinde $f_n \rightarrow f$ (düzgün) olduğundan $\forall n \geq N$ ve $\forall x \in E$ için

$$|f_n(x) - f(x)| < 1$$

olacak şekilde $\exists N \in \mathbb{N}$ vardır. Özel'olarak $\forall x \in E$ için

$$|f_N(x) - f(x)| < 1,$$

dolayısıyla $\forall x \in E$ için

$$|f(x)| < |f_N(x)| + 1$$

yazabiliriz. f_N fonksiyonu E üzerinde sınırlı olduğundan $\forall x \in E$ için

$$|f_N(x)| < M$$

olacak şekilde bir $M > 0$ vardır. Böylece

$\forall x \in E$ için $|f(x)| < M$ olur ve f 'nin E üzerindeki sınırlılığını ispatlar.

NOT. Sınırlı fonksiyonların noktasal yakınsak bir dizisinin limit fonksiyonu sınırlı olmayabilir. Örnek olarak

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & x \in (0, \frac{1}{n}] \\ \frac{1}{x}, & x \in (\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

olmak üzere (f_n) fonksiyon dizisini düşünelim. f_n fonksiyonları $[0, 1]$ yarı-açık aralıkta tanımlanmıştır. Eğer $x = 1$ ise $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_n(1) = \frac{1}{1} = 1$ ve eğer $x \in (0, 1)$ ise $\frac{1}{n_0} < x < 1$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ var olup, $\forall n \geq n_0$ için $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < x < 1$ ve $f_n(x) = \frac{1}{x}$, dolayısıyla $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{1}{x}$ olur. Böylece (f_n) dizisinin f limit fonksiyonu

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{1}{x}$$

biçiminde tanımlanabilir.

$\forall n \in \mathbb{N}$ aralığında $\forall x \in (0, 1]$ için $|f_n(x)| < n+1$ ol-

olduğundan, (f_n) dizisindeki tüm fonksiyonlar sınırlıdır. Ama $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$ olduğundan, f limit fonksiyonu $(0,1]$ üzerinde sınırlı değildir. #

Düzgün Yakınsama ve Süreklilik.

Teorem 24. Bir $E \subset \mathbb{R}$ üzerinde $f_n \rightarrow f$ (düzgün) olduğunun kabul edelim. $x \in E'$ (x, E nin bir limit noktası) olsun. Yine $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{t \rightarrow x} f_n(t) = A_n$$

verilsin. O zaman (A_n) dizisi yakınsaktır ve

$$\lim_{t \rightarrow x} f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$$

olur. Diğer bir deyişle

$$\lim_{t \rightarrow x} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow x} f_n(t)$$

dir.

İspat. $\forall \varepsilon > 0$ verilsin. (f_n) dizisinin düzgün yakınsaklığı gereğince $\forall n \geq N, \forall m \geq N$ ve $\forall t \in E$ için

$$|f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon$$

olacak şekilde $\exists N \in \mathbb{N}$ vardır.

$f \rightarrow x$ iken limit alındığında $\forall n \geq N$ ve $\forall m \geq N$ için

$$|A_n - A_m| \leq \varepsilon$$

yazılabilir, böylece (A_n) bir Cauchy dizisidir ve bundan dolayı yakınsaktır. $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ denirse $\forall t \in E$ için

$$|f(t) - A| \leq |f(t) - f_n(t)| + |f_n(t) - A_n| + |A_n - A| \quad (*)$$

yazılabilir. Önce $f_n \rightarrow f$ (düzgün) olmasını kullanarak $\forall t \in E$ için

$$|f(t) - f_n(t)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ ve } |A_n - A| < \frac{\varepsilon}{3}$$

olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ seçelim. $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$

bu n için $t \in V \cap E, t \neq x$ ise

-106-

$$|f_n(t) - A_n| < \frac{\varepsilon}{3}$$

olacak şekilde x 'in bir V komşuluğunu seçelim ($\lim_{t \rightarrow x} f_n(t) = A_n$ olduğundan bu mümkün). Yukarıdaki sonuç eşitsizliği kullanarak (*) dan $t \in V \cap E$, $t \neq x$ sağlandığında

$$|f(t) - A| < \varepsilon$$

olduğunu görürüz. Bu $\lim_{t \rightarrow x} f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ olmasına denktir.

Teorem 25. Eğer (f_n) dizisi E üzerinde sürekli olan fonksiyonların bir dizisi ve $f_n \rightarrow f$ (düzgün) ise o zaman f fonksiyonu da E üzerinde sürekli'dir.

İspat. Eğer $x_0 \in E'$ ise, o zaman f fonksiyonu x_0 da sürekli $\Leftrightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = f(x_0)$$

yazabiliriz, böylece Teorem 24 ile istenen elde edilir.

NOT: Bu teoremin tersi genelde doğru değildir, yani düzgün yakınsama sürekliliği dizinin tek tek terimlerinden limit fonksiyonuna iletmek için yeterli, ama gerekli değildir.

ÖRNEK. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0,1]$ için $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$ olacak şekilde $[0,1]$ üzerinde tanımlanmış fonksiyonların bir dizisi olsun. f limit fonksiyonu vardır ve

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 x(1-x)^n = 0, (\forall x \in [0,1])$$

dir. Asikar olarak dizideki her bir terim, hem de limit fonksiyonu ($f=0$) sürekli dir.

Bununla birlikte $\forall n \in \mathbb{N}$ için $M_n = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)|$ olduğunda $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n > 0$ olduğundan, Teorem 21 gereğince $[0,1]$ üzerinde $f_n \rightarrow f$ yakınsaması düzgün değildir.

Düzgün Yakınsama ve Riemann İntegrallenebilirlik:

Teorem 26. $\forall n \in \mathbb{N}$ için f_n fonksiyonları $[a, b]$ üzerinde Riemann integrallenebilir fonksiyonlar ve $[a, b]$ üzerinde $f_n \rightarrow f$ (düzgün) olduğunu kabul edelim. O zaman f fonksiyonu da $[a, b]$ üzerinde Riemann integrallenebilirdir ve

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

olur.

İspat. $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\varepsilon_n = \sup_{a \leq x \leq b} |f_n(x) - f(x)|$$

olsun, O zaman $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in [a, b]$ için

$$f_n(x) - \varepsilon_n \leq f(x) \leq f_n(x) + \varepsilon_n$$

yazılabilir ve böylece f nin alt ve üst Riemann integralleri için

- 109 -

$$\int_a^b (f_n(x) - \varepsilon_n) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b (f_n(x) + \varepsilon_n) dx \dots (*)$$

sağlanır. Bundan dolayı $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$0 \leq \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f_n(x) dx \leq \varepsilon_n (b-a)$$

olur. $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ olduğundan, f nin alt ve üst Riemann integralleri eşittir. Böylece f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde Riemann integrallenebilir. (*) eşitsizliğinin bir diğer uygulaması da

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f_n(x) dx \right| \leq \varepsilon_n (b-a)$$

birimindedir. Bu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

olmasını gerektirir.

Düzgün Yakınsama ve Türev:

$[a, b]$ üzerinde türevli fonksiyonların bir (f_n) dizisinin, $[a, b]$ üzerinde $f_n \rightarrow f$ (düzgün) olması halinde $f'_n \rightarrow f'$ düzgün ve $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$ olduğu da düşünülebilir. Ama aşağıdaki örnekte bunun

- 110 -

doğru olmadığını göreceğiz.

ÖRNEK. Limiti 0 olan türevli fonksiyonların bir (f_n) dizisini $\forall x \in \mathbb{R}$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$$

biçiminde kurabiliriz. Asikar olarak $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ dir, üstelik bu yakınsama düzgündür,

ama $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f'_n(x) = \sqrt{n} \cos nx$ olup, her bir $x \in \mathbb{R}$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$ limiti yoktur.

Teorem 27. (f_n) dizisinin her bir teriminin bir (a, b) açık aralığının her bir noktasında bir sonlu türeve sahip olan bir reel-değerli fonksiyon olduğunu ve (a, b) deki en az bir x_0 noktası için $(f_n(x_0))$ dizisinin yakınsak olduğunu kabul edelim. Üstelik (a, b) üzerinde $f'_n \rightarrow g$ (düzgün) olacak şekilde bir g fonksiyonu var olsun. O zaman şu iki özellik gerçekleşir:

-141-

a) (a, b) üzerinde $f_n \rightarrow f$ (düzgün) olacak şekilde bir f fonksiyonu vardır.

b) Her bir $x \in (a, b)$ için $f'(x) = g(x)$ tir.

İspat. $c \in (a, b)$ olduğunu kabul edelim ve bir (g_n) fonksiyon dizisini şöyle tanımlayalım:

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c}, & x \neq c \\ f'_n(c), & x = c \end{cases}$$

Bu şekilde oluşturulan (g_n) dizisi c nin seçimine bağlıdır. $f'_n(c) = g_n(c)$ olduğundan $f'_n \rightarrow g$ (düzgün) hipotezine göre $(g_n(c))$ dizisi yakınsak ve $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(c) = g(c)$ dir.

Eğer $x \neq c$ ise

$$g_n(x) - g_m(x) = \frac{f_n(x) - f_n(c) - (f_m(x) - f_m(c))}{x - c}$$

yazabiliriz. Yine $h(x) = f_n(x) - f_m(x)$ alırsak, her bir $x \in (a, b)$ için $h'(x)$ var ve $h'(x) = f'_n(x) - f'_m(x)$ tir. Ortalama değer teoremini (a, b) üzerinde

-112-

h fonksiyonuna uygulayarak

$$\begin{aligned} h'(x_1) &= f'_n(x_1) - f'_m(x_1) = (h(x) - h(c)) / (x - c) \\ &= [(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(c) - f_m(c))] / (x - c) \quad (*) \\ &= g_n(x) - g_m(x) \end{aligned}$$

olacak şekilde x ve c arasında bir x_1 noktası bulabiliriz.

(a, b) üzerinde $f'_n \rightarrow g$ (düzgün) olduğundan, (*) gereğince (a, b) üzerinde (g_n) dizisinin düzgün yakınsak olduğunu sonucunu çıkarmak için Cauchy kriterini kullanabiliriz.

Şimdi (f_n) dizisinin (a, b) üzerinde düzgün yakınsak olduğunu göstereyim. Bunun için $(f_n(x_0))$ dizisinin yakınsak kabul edildiği özel $c = x_0$ noktasına karşılık gelen özel bir (g_n) dizisini oluşturalım. $\forall x \in (a, b)$ için gerçekte bir

$$f_n(x) = g_n(x)(x - x_0) + f_n(x_0)$$

əritliğini yazabiliriz. Bundan dolayı

$$f_n(x) - f_m(x) = (g_n(x) - g_m(x))(x - x_0) + f_n(x_0) - f_m(x_0)$$

elde edəriz. Cauchy kəpulu yərdəlməy-lə bu əritlik (a, b) üzərində (f_n) əlizişinin düzgün yəkinsəkləğini bəklər.

Böyləce (a) sikkə ispatlanmış olur.

(b) sikkəni ispatlamək iştir (a, b) deki keyfi bir c nöktəsi iştir tanımlanan (g_n) əlizişinə geri dönəlim və $G(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$ olsun. f_n' türevləriniin var olmağı hipotezi $\lim_{x \rightarrow c} g_n(x) = f_n'(c) = g_n(c)$ ololugunu bəklədir. Digər bir deyişlə, hər bir g_n funksiyəni c nöktə-sində sükreklidir. (a, b) üzərində $g_n \rightarrow G$ (düzgün) ololugu iştir, G limit funksiyəniində c nöktəsində sükreklidir. Bu sonucun pəraqəti olan

$$G(c) = \lim_{x \rightarrow c} G(x)$$



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



20

Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Cenap DUYAR

Analiz III

Fonksiyon dizi ve serileri- Düzgün
Yakınsaklık, Düzgün yakınsama ve süreklilik,
Düzgün yakınsama ve Riemann
integrallenebilirlik, Düzgün yakınsama ve
türevlenebilirlik

Ders 8