



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Dijital Ders Platformu

Seriler- Gelişmiş testler(Raabe
testi, İntegral testi), Alterne seriler,
Mutlak yakınsama

Prof. Dr. Cenap DUYAR

Ders 7

-87-

Burada bir serinin (pozitif terimli) yakınsak olup olmadığını onu bir has olmayan integral ile kıyaslamakla karar verebileceğimizi belirten integral testini inceleyelim:

Integral Testi. $f(x)$ her $n=1, 2, \dots$ için $f(n)=a_n$ olmak üzere $[1, \infty)$ üzerinde tanımlı bir pozitif, azalan ve sürekli fonksiyon olsun. O zaman

$\int_1^{\infty} f(x) dx$ yakınsak $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsak olur.

Örneğin $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ has olmayan integrali $p > 1$ ise yakınsak ve $p \leq 1$ ise ıraksak olduğundan, integral testi gereğince $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ serisi $p > 1$ için yakınsak ve $p \leq 1$ için ıraksaktır.

- 88 -

ÖRNEK. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisini düşünelim. Bu durumoldu için

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)}$$

ve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ yakınsak olduğu için karşılaştırma testine göre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisinde yakınsaktır.

ÖRNEK. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ yakınsak ve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ıraksak olduğu için karşılaştırma testine göre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ serisinin $p \geq 2$ için yakınsak ve $p \leq 1$ için ıraksak olduğunu görürüz.

ÖRNEK. $p > 1$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ serisini düşünelim.

Bu serinin yakınsaklığını tartışmak için $x \geq 1$ olmak üzere $f(x) = 1/x^p$ fonksiyonunu ele alalım. $p \neq -1$ için x^p fonksiyonunun belirsiz integralinin $x^{p+1}/(p+1)$ olduğunu kullanarak her bir $k \in \mathbb{N}$ için

$$k-1 \leq x \leq k \Rightarrow \frac{1}{k^p} \leq \frac{1}{x^p} \Rightarrow \frac{1}{k^p} \leq \int_{k-1}^k \frac{dx}{x^p}$$

olduğunu görürüz. Bundan dolayı

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^p} \leq \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{dx}{x^p} = \int_1^n \frac{dx}{x^p} = \frac{n^{1-p} - 1}{1-p} = \frac{1 - n^{1-p}}{p-1} \leq \frac{1}{p-1}$$

olduğunu görürüz. Böylece $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p} \leq \frac{1}{p-1} + 1$$

elde edilir. (s_n) kısmi toplamlar dizisi monoton artan ve üstten sınırlıdır. Bundan dolayı (s_n) dizisi ve dolayısıyla $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $(p > 1)$ serisi yakınsaktır.

Alterne Seriler

TANIM. (u_n) pozitif terimli bir dizi olduğunda, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ biçimindeki bir seriye 'alterne seri' denir.

Teorem 17 (Leibniz'in Teoremi). Her $n \in \mathbb{N}$ için $u_n \geq u_{n+1}$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ olacak şekilde bir (u_n) dizisinin verildiğini kabul edelim.

0 zaman $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ ~~serisi~~ alterne serisi yakınsaktır.

İspat. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ serisinin kısmi toplam-
lar dizisi (S_n) olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1} \quad \dots (*)$$

olduğunu gözlemleyebiliriz. Buna göre (S_{2n}) dizisinin yakınsak olduğunu göstermek yeterlidir, çünkü $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ olduğundan (*) gereğince (S_{2n+1}) de yakınsak olacaktır. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$S_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2n-1} - u_{2n})$$

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \dots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n}$$

olduğunu not edelim. (u_i) dizisi artmayan olduğundan her bir $i \in \mathbb{N}$ için $u_i - u_{i+1} \geq 0$ dir ve buna göre (S_{2n}) dizisi monoton artan, aynı zamanda üstten sınırlıdır (u_1 bir üst sınır).
O zaman (S_{2n}) yakınsaktır.

#

Son teoreme göre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ serisi yakınsaktır. Benzer şekilde $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$ serilerinde yakınsaktır.

Mutlak Yakınsama.

TANIM. Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ serisi yakınsak ise, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin mutlak yakınsak olduğu söylenir.

Teorem 18. Her mutlak yakınsak seri yakınsaktır.

İspat. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi mutlak yakınsak, yani $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ serisi yakınsak olsun. Yine $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ serilerinin kısmi toplamlar dizileri sırasıyla (s_n) ve (t_n) olsun. O zaman $n > m$ olmak üzere

$$|s_n - s_m| = \left| \sum_{j=m+1}^n a_j \right| \leq \sum_{j=m+1}^n |a_j| = |t_n - t_m|$$

elde ederiz. (t_n) yakınsak olduğu için bir Cauchy dizisidir. Yukarıdaki eşitsizliğe göre (s_n) dizisinde bir Cauchy dizisi ve dolayısıyla yakınsaktır.

TANIM. Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak, ama mutlak yakınsak değilse, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin 'kondullu yakınsak' olduğu söylenir.

ÖRNEK. (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ serisi kondullu yakınsaktır.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$ serisi mutlak yakınsaktır.

(iii) Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha)}{n^2}$ serisi mutlak yakınsaktır. Çünkü $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\left| \frac{\sin(n\alpha)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

ve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ yakınsak olduğundan, karşılaştırma testine göre $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(n\alpha)}{n^2} \right|$ serisi yakınsaktır.

(iv) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n \ln(\ln n)}$ serisi kondullu yakınsaktır.

Bunu görmek için $u_n = \frac{\ln n}{n \ln(\ln n)}$ olsun. $\forall n \geq 3$ için $n \geq \ln n \geq \ln(\ln n)$ olduğundan,

$$\frac{n}{n \ln(\ln n)} \geq \frac{\ln n}{n \ln(\ln n)} \geq \frac{\ln(\ln n)}{n \ln(\ln n)} \Rightarrow \frac{1}{\ln(\ln n)} \geq \frac{\ln n}{n \ln(\ln n)} \geq \frac{1}{n} \quad (*)$$

-93-

olur ve buna göre $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ dir. Aynı zamanda $\forall n \geq 3$ için $u_{n+1} \leq u_n$ olduğu görülebilir ($[3, \infty)$ aralığında $f(x) = \frac{\ln x}{x \ln(\ln x)}$ fonksiyonu artmayan olduğu kullanılır). Bu durumda Leibnitz teoremine göre verilen seri yakınsaktır. Yine (*) gereğince $\sum_{n=3}^{\infty} u_n$ serisi iraksak olur.

Burada analizde bazı ileri konular üzerine kurulan ispatlara sahip iki teorem yer vereceğiz.

TEOREM 19. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mutlak yakınsak bir seri ve (b_n) dizisi (a_n) dizisinin terimlerinin yeniden düzenlenmesiyle elde edilen bir dizi olsun. O zaman $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serisinde mutlak yakınsak ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

olur.

-5-94-

Teorem 20. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bir koşullu yakınsak seri olsun. O zaman her $\alpha \in \mathbb{R}$ için, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \alpha$ olacak şekilde terimleri (a_n) dizisinin terimlerinin yeniden düzenlemesiyle elde edilen bir (b_n) dizisi vardır.

Son teoremi örneklemek için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ serisini düşünelim: Verilen seri

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \dots$$

biçimindedir. Bu serinin

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} + \dots$$

biçimindeki yeniden düzenlemesini düşünelim. Böylece eğer $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ise, yeniden düzenlenmiş seri $k = 1, 2, \dots$

için

$$b_{3k-2} = \frac{1}{2k-1}, \quad b_{3k-1} = -\frac{1}{4k-2}, \quad b_{3k} = \frac{1}{4k}$$

olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serisidir. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serilerinin kısmi toplamlar dizileri, sırasıyla (s_n) ve (t_n) olsun. O zaman

$$\begin{aligned} t_{3k} &= \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} s_{2k} \end{aligned}$$

olduğunu görürüz. Aynı zamanda

$$t_{3k+1} = t_{3k} + \frac{1}{2k+1}, \quad t_{3k+2} = t_{3k} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{4k+2}$$

elde ederiz. (s_n) dizisinde yakınsak olduğunu biliyoruz. $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ olsun. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ olduğundan için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} t_{3k} = \frac{s}{2}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} t_{3k+1} = \frac{s}{2}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} t_{3k+2} = \frac{s}{2}$$

olur. Bundan dolayı $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \frac{s}{2}$ elde edilir.



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Cenap DUYAR

Analiz III

Seriler- Gelişmiş testler(Raabe testi, Integral testi), Alterne seriler, Mutlak yakınsama

Ders 7