ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Cebirsel Yapılar

Dr. Öğr. Üyesi Abdullah DERTLİ

Ders 9

CEBİRSEL YAPILAR

İkili İşlemler

Tanım: A bostan farklı bir küme olsun. $f : A \times A \longrightarrow A$ tanımlanan bir fonksiyona A üzerinde bir <u>ikili işlem</u> denir.

İkili işlem $\forall (a,b) \in A \times A$ elemanını bir tek $f(x,y) \in A$ elemanına götürür.

$$\begin{aligned} * : A \times A &\longrightarrow A \\ (a,b) &\longmapsto a * b \end{aligned}$$

i) $\forall a,b \in A$ için $a * b \in A$

ii) $\forall a,b \in A$ için $a * b$ elemanı teklikle belirlenir.

Örnek:

$$+ : \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$$
$$(x,y) \longmapsto x+y$$
ikili işlem

$$\Delta : \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$$
$$(x,y) \longmapsto \frac{x}{y}$$
ikili islem degil

$$\square : \mathbb{Q}^{*}\times\mathbb{Q}^{*} \longrightarrow \mathbb{Q}^{*}$$
$$(x,y) \longmapsto \frac{x}{y}$$
ikili işlem

Örnek: Önermeler cebirinde tanımlanan $\wedge, \vee$ bir ikili işlemdir.

Örnek: i) $A \neq \emptyset$, A nın kuvvet kümesi üzerinde tanımlanan $\cup, \cap$ bir ikili işlemdir.

ii) $S(A) = \{ f : f : A \xrightarrow[\text{fonk.}]{} A \}$ olsun. A üzerinde tanımlanan

Fonksiyon için bileşke işlemi $S(A)$ üzerinde bir ikili işlemdir.

Tanım: Üzerinde en az bir ikili işlem tanımlanan bir kümeye <u>cebirsel yapı</u> denir. A kümesi üzerinde ikili işlem $*$ ise bu cebirsel yapı $(A,*)$ ile gösterilir.

Tanım: $*$, A kümesi üzerinde bir ikili işlem olsun.

i) $\forall a,b,c \in A$ için

$$a*(b*c) = (a*b)*c$$

sağlanıyorsa $*$ işleminin <u>birleşme özelliği</u> vardır denir.

ii) $\forall a,b \in A$ için

$$a*b = b*a$$

sağlanıyorsa $*$ işleminin <u>değişme özelliği</u> vardır denir.

iii) $\forall a \in A$ için $a*e = e*a = a$ olacak şekilde en az bir $e \in A$ varsa e ye $*$ işleminin <u>birim (etkisiz) elemanı</u>, $*$ işlemine de <u>birimlidir</u> denir.

Yani;

$$\exists e \in A \ni \forall a \in A \text{ için } a * e = e * a = a$$

iv) $\forall a \in A$ için $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ olacak şekilde $a^{-1} \in A$ varsa a nın $*$ işlemine göre <u>tersi</u> vardır denir. $a^{-1} \in A$ elemanına $a \in A$ elemanının $*$ işlemine göre <u>tersi</u> denir.

Yani;

$$\forall a \in A \text{ için } \exists a^{-1} \in A \ni a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$$

v) $\forall a \in A$ için $a * k = k * a = k$ olacak şekilde $k \in A$ varsa k ya $*$ işleminin <u>yutan</u> elemanı denir.

Tanım: $*$, Δ, A kümesi üzerinde ikili işlemler olsun. $\forall x, y, z \in A$ için

$$x * (y \Delta z) = (x * y) \Delta (x * z)$$

oluyorsa $*$ soldan Δ üzerine <u>dağılımlıdır</u> denir.

Benzer şekilde sağdan da tanımlanabilir.

Tanım: $*$, A kümesi üzerinde ikili işlem olsun. Birleşme, birim eleman ve ters eleman özellikleri sağlanıyorsa $(A, *)$ cebirsel yapısına <u>grup</u> denir. Ayrıca değişme özelliği de sağlanıyorsa <u>değişmeli grup</u> (Abel grup) denir.

$(\mathbb{Z}, +)$ değişmeli bir gruptur
$(\mathbb{N}, +)$ bir grup değildir.
$(\mathbb{Q}, +)$ bir gruptur
$(\mathbb{Q}, \cdot)$ bir grup değildir.
$(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ bir gruptur.

Tanım: A kümesi üzerinde $\circ$, $*$ ikili işlemleri tanımlansın.

i) $(A, \circ)$ değişmeli gruptur

ii) $*$ işleminin birleşme özelliği vardır.

iii) $*$ işleminin o işlemi üzerine dağılma özelliği vardır.

$\forall x, y, z \in A$ için

$x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z)$ soldan dağılma özelliği

$(x \circ y) * z = (x * z) \circ (y * z)$ sağdan dağılma özelliği

koşulları sağlanıyorsa $(A, \circ, *)$ cebirsel yapısına halka denir.

Eğer $*$ işleminin birimi varsa $(A, \circ, *)$ birimli halkadır denir. Eğer $*$ işleminin değişme özelliği varsa $(A, \circ, *)$ değişmeli halkadır denir.

Örnek: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ bir halkadır.

Tanım: $(A, \circ, *)$ bir halka olsun. $\circ$ işleminin birim elemanına halkanın sıfırı denir ve 0_A ile gösterilir. $*$ işleminin birimi varsa buna halkanın birimi denir ve 1_A ile gösterilir.

Tanım: $(A, \circ, *)$ birimli, değişmeli bir halka olsun. $(A - \{0_A\}, *)$ bir grup ise $(A, \circ, *)$ bir cisimdir denir.

Örnek: $(\mathbb{Q}, +, .)$ bir cisimdir.
$(\mathbb{Z}, +, .)$ bir cisim değildir.

Örnek: $\mathbb{R}$ üzerinde $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için $a * b = \dfrac{a+b}{2}$ olarak tanımlanan $*$ işleminin özelliklerini inceleyiniz.

$$* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(a, b) \longmapsto a * b = \frac{a+b}{2}$$

- $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için $a * b \in \mathbb{R}$ olduğundan kapalıdır.
- $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için $a * b = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{b+a}{2} = b * a$ olduğundan değişmelidir.
- $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ için

$$① \ (a * b) * c = \left(\frac{a+b}{2}\right) * c = \frac{\frac{a+b}{2} + c}{2} = \frac{a+b+2c}{4}$$

② $a*(b*c) = a*\left(\frac{b+c}{2}\right) = \frac{a+\frac{b+c}{2}}{2} = \frac{2a+b+c}{4}$

① ≠ ② olduğundan birleşme özelliği yoktur

- $\exists e \in \mathbb{R} \ni \forall x \in \mathbb{R}$ için $x*e = e*x = x$?

$$x*e = x \Rightarrow \frac{x+e}{2} = x$$
$$\Rightarrow x+e = 2x$$
$$\Rightarrow \boxed{e = x}$$

Birim eleman yoktur.

- Birim eleman olmadığından ters eleman da yoktur.

Örnek: $G = \{3^x : x \in \mathbb{Z}\}$ üzerinde $3^x * 3^y = 3^{x+y}$ işlemi tanımlanıyor. $(G,*)$ bir grup mu? Gösteriniz.

- $\forall x,y,z \in \mathbb{Z}$ için

$$(3^x * 3^y) * 3^z = 3^{x+y+z}$$
$$3^x * (3^y * 3^z) = 3^{x+y+z}$$

olduğundan birleşmelidir.

- $\exists\ 3^e \in G \ni \forall\ 3^x \in G$ için $3^x * 3^e = 3^e * 3^x = 3^x$?

$$3^x * 3^e = 3^x \Rightarrow 3^{x+e} = 3^x$$
$$\Rightarrow x + e = x$$
$$\Rightarrow e = 0 \in \mathbb{Z}$$

- $\forall\ 3^x \in G$ için $\exists\ 3^{x'} \in G \ni 3^x * 3^{x'} = 3^{x'} * 3^x = 3^0$?

$$3^x * 3^{x'} = 3^0 \Rightarrow 3^{x+x'} = 3^0$$
$$\Rightarrow x + x' = 0$$
$$\Rightarrow x' = -x \in \mathbb{Z}$$

$\therefore (G, *)$ bir gruptur.

Tanım: $(A, \leq)$ bir kısmi sıralı küme olsun. $\forall x, y \in A$ için $\sup\{x, y\}$, $\inf\{x, y\}$ mevcutsa A ya bir <u>kafes (latis)</u> denir.

$$\sup\{x, y\} = x \vee y$$
$$\inf\{x, y\} = x \wedge y$$

örnek: $(\mathbb{Z}, \leq)$ verilsin. $\forall a,b \in \mathbb{Z}$ için $a \leq b$ verildiğinde $a \vee b = b$, $a \wedge b = a$ olup $\mathbb{Z}$ bir kafestir.

örnek: $A \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere $(P(A), \subseteq)$ bir kafestir. $A_1, A_2 \in P(A)$ olsun.

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \vee A_2 = A_1 \cup A_2 \\ A_1 \wedge A_2 = A_1 \cap A_2 \end{array}\right\} \text{ alınırsa } P(A) \text{ bir kafes olur.}$$

GENEL ÖRNEKLER

örnek $[p' \Leftrightarrow q]'$ önermesini kısaltarak yazınız.

$$\begin{aligned} [p' \Leftrightarrow q]' &\equiv [(p' \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p')]' \\ &\equiv [(p \vee q) \wedge (q' \vee p')]' \\ &\equiv (p \vee q)' \vee (q' \vee p')' \\ &\equiv (p' \wedge q') \vee (q \wedge p) \\ &\equiv p \Leftrightarrow q \end{aligned}$$

Örnek: Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

olur mu? Gösteriniz.

Tümevarım yöntemiyle ispatlayalım.

n, k pozitif tamsayılar ve $0 < k \leq n$ olmak üzere

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \quad \cdots \; (*)$$

eşitliğini kullanacağız.

- $n = 1$ için $\binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 1 + 1 = 2 = 2^1$

olduğundan doğrudur.

- $n-1$ için doğru olsun.

$$\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \cdots + \binom{n-1}{n-1} = 2^{n-1}$$

olsun.

• n için doğru mu?

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\dots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n} \underset{(*)}{=} \binom{n}{0}+\left[\binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1}\right]+$$

$$\left[\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{2}\right]+\dots+\left[\binom{n-1}{n-2}+\binom{n-1}{n-1}\right]+\binom{n}{n}$$

$$=\binom{n}{0}+\binom{n-1}{0}+2\left[\binom{n-1}{1}+\dots+\binom{n-1}{n-2}\right]+\binom{n-1}{n-1}+\binom{n}{n}$$

$$=\binom{n}{0}-\binom{n-1}{0}+2\left[\binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1}+\dots+\binom{n-1}{n-2}+\binom{n-1}{n-1}\right]-\binom{n-1}{n-1}+\binom{n}{n}$$

$$=1-1+2\cdot 2^{n-1}-1+1=2^n$$

$\therefore$ Eşitlik her $n\in\mathbb{N}$ için doğrudur.

Örnek: A, B, C kümeler olmak üzere $A \subseteq B$ ve $B \subseteq C$ ve $C \subseteq A$ ise A kümesi B kümesine eşit midir?

$$
\begin{aligned}
A \subseteq B,\ B \subseteq C,\ C \subseteq A &\Rightarrow [A \subseteq B \wedge (B \subseteq C \wedge C \subseteq A)] \\
&\Rightarrow [A \subseteq B \wedge B \subseteq A] \\
&\Rightarrow A = B
\end{aligned}
$$

Örnek: $A' \cap (A' \cup B')' = \emptyset$ olduğunu gösteriniz.

$$
\begin{aligned}
A' \cap (A' \cup B')' &= A' \cap (A \cap B) \\
&= (A' \cap A) \cap B \\
&= \emptyset \cap B \\
&= \emptyset
\end{aligned}
$$

Örnek: A, B ve C, D kümeleri için

$$(A\times B)\cup(C\times D) = (A\cup C)\times(B\cup D)$$

olduğunu gösteriniz.

$$\begin{aligned}(x,y)\in(A\times B)\cup(C\times D) &\Leftrightarrow (x,y)\in A\times B \vee (x,y)\in C\times D\\ &\Leftrightarrow (x\in A \wedge y\in B)\vee(x\in C\wedge y\in D)\\ &\not\Leftrightarrow (x\in A\vee x\in C)\wedge(y\in B\vee y\in D)\\ &\Leftarrow x\in A\cup C \wedge y\in B\cup D\\ &\Leftarrow (x,y)\in(A\cup C)\times(B\cup D)\end{aligned}$$

Örnek: $\mathbb{Z}$ üzerinde "$x\,R\,y \Leftrightarrow x$ ile y aralarında asal sayılar" şeklinde tanımlanan bağıntıyı inceleyiniz.

$$R=\{(x,y) : (x,y)=1,\ x,y\in\mathbb{Z}\}$$

- $(3,3)=3\neq 1$ olduğundan yansımalı değildir.
- $(x,y)=1 \Rightarrow (y,x)=1$ olduğundan simetriktir.
- $(2,5),(5,2)\in R$ iken $2\neq 5$ olup ters simetrik değildir.
- $(3,5),(5,6)\in R$ $(3,6)\notin R$ olduğundan geçişmeli değildir.

Örnek: $\beta = \{ (x,y) : x,y \in \mathbb{Z} \text{ ve } x^2+y = x+y^2 \}$
olduğuna göre β bağıntısının denklik bağıntısı olup olmadığını inceleyiniz. Denklik bağıntısı ise -3 ün denklik sınıfını bulunuz.

- $\forall x \in \mathbb{Z}$ için $x^2+x = x+x^2$ olup $(x,x) \in \beta$

olduğundan yansıyandır.

- $\forall x,y \in \mathbb{Z}$ için $(x,y) \in \beta$ olsun.

$$x^2+y = x+y^2 \Rightarrow y^2+x = y+x^2$$
$$\Rightarrow (y,x) \in \beta$$

O halde β simetriktir.

- $\forall x,y,z \in \mathbb{Z}$ için $(x,y), (y,z) \in \beta$ olsun.

$$\left.\begin{array}{l} (x,y) \in \beta \Rightarrow x^2+y = x+y^2 \\ (y,z) \in \beta \Rightarrow y^2+z = y+z^2 \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{toplarsak}]{} x^2+z = x+z^2$$
$$\Rightarrow (x,z) \in \beta$$

$\therefore$ β denklik bağıntısıdır.

$$\overline{(-3)} = \{ y \in \mathbb{Z} : (y,-3) \in \beta \}$$

$$= \{ y \in \mathbb{Z} : y^2 + (-3) = y + (-3)^2 \}$$

$$= \{ y \in \mathbb{Z} : y^2 - 3 = y + 9 \}$$

$$= \{ y \in \mathbb{Z} : y^2 - y - 12 = 0 \}$$

$$= \{ y \in \mathbb{Z} : (y-4)(y+3) = 0 \}$$

$$= \{ -3, 4 \}$$

Örnek: $f: X \to Y$, $A \subseteq X$ olsun. $f|_A = g$ olmak üzere $B \subseteq Y$ için $g^{-1}(B) = A \cap f^{-1}(B)$ olur mu? Gösteriniz.

$$\begin{aligned} x \in g^{-1}(B) &\iff g(x) \in B \\ &\iff f|_A(x) \in B \\ &\iff x \in A \text{ ve } f(x) \in B \\ &\iff x \in A \text{ ve } x \in f^{-1}(B) \\ &\iff x \in A \cap f^{-1}(B) \end{aligned}$$

$$\therefore\ g^{-1}(B) = A \cap f^{-1}(B)$$

Örnek: X ve Y kısmi sıralı kümeler, $f: X \to Y$ bir sırasal eşyapı dönüşümü olsun. X tam sıralı ise Y nin de tam sıralı olduğunu gösteriniz.

$y_1, y_2 \in Y$ olsun. $f: X \to Y$ örten olduğundan

$\exists x_1, x_2 \in X \ni f(x_1)=y_1$, $f(x_2)=y_2$. X tam sıralı olduğundan $x_1 \leq x_2$ (ya da $x_2 \leq x_1$). f sıra korur olduğu için $f(x_1) \leq f(x_2)$ (ya da $f(x_2) \leq f(x_1)$). O halde $y_1 \leq y_2$ (ya da $y_2 \leq y_1$) dir. Y nin herhangi iki elemanı karşılaştırılabilir olduğundan Y tam sıralıdır.

Örnek: $A=\{0,1\}$ olmak üzere $P(A)$ kümesinde tanımlanan

$$\cap : P(A) \times P(A) \longrightarrow P(A)$$
$$(X, Y) \longmapsto X \cap Y$$

işleminin çizelgesini yapınız.

$P(A)=\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, A\}$

$\cap$	$\emptyset$	$\{0\}$	$\{1\}$	A
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{0\}$	$\emptyset$	$\{0\}$	$\emptyset$	$\{0\}$
$\{1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{1\}$
A	$\emptyset$	$\{0\}$	$\{1\}$	A

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Dr. Öğr. Üyesi Abdullah DERTLİ

Soyut Matematik I

Ünite 9

Ünite 9