ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

P – Gruplar ve Sylow Teoremleri

Prof. Dr. Şenol EREN

Ders 23

Teorem 3.8.28 (Birinci Sylow Teoremi) G sonlu bir grup, p bir asal sayı, k, m doğal sayılar ve $(k,p)=1$ olmak üzere $|G| = k.p^m$ olsun. O zaman G'nin mertebesi p^m olan bir p-altgrubu vardır.

İspat: G'nin p^m elemanlı altkümelerinin sayısı $\mathcal{M}$ olsun. Not 3.8.27 (iii)'den $|\mathcal{M}| \equiv k \pmod p$ ve $(k,p)=1$ olduğundan $p \nmid \mathcal{M}$ dir. $A \in \mathcal{M}$ ve $g \in G$ için $gA = \{ga \mid a \in A\}$ olarak tanımlansın. $|gA| = |A| = p^m$ olduğundan $gA \in \mathcal{M}$ dir. Tanıma göre $\mathcal{M}$ bir G-kümedir. G'nin $\mathcal{M}$ üzerindeki farklı yörüngeleri $A_1, \dots, A_r \in \mathcal{M}$ olmak üzere $Orb(A_1), \dots, Orb(A_r)$ olsun. $|\mathcal{M}| = |Orb(A_1)| + \dots + |Orb(A_r)|$ di. Ayrıca $p \nmid \mathcal{M}$ olduğundan bir $1 \leq i \leq r$ için $p \nmid |Orb(A_i)|$ dir. $S = A_i$ olsun. Teorem 3.7.22 (i)'den $[G : G_S] = |Orb(S)|$

ve $p \nmid |Orb(s)|$ olduğundan $p \nmid [G:G_s]$ dir. $p^m \mid |G_s|$ olduğundan $|G_s| \geq p^m$ dir. $a \in S$ alalım. $\forall x \in G_s$ için $xS = S$ olup $xa \in S$ dir. Buradan $G_s a \subseteq S$ ve $|G_s a| \leq |S|$ bulunur. Ayrıca $|G_s| = |G_s a|$ ve $|S| = p^m$ olduğundan $|G_s| \leq p^m$ ve Böylece $|G_s| = p^m$ olur.

Teorem 3.8.29 (ikinci Sylow Teoremi) G sonlu bir grup olsun. G nin her hangi iki sylow p- altgrubu G içinde eşleniktir.

İspat: $k \in \mathbb{Z}^+$ ve $(k,p) = 1$ olmak üzere $|G| = k.p^m$ olsun. G nin iki sylow p- altgrubu P ve Q olsun $|P| = |Q| = p^m$ dir. $gPg^{-1} = Q$ olacak biçimde bir $g \in G$ olduğunu göstermek yeter. $A = \{gP \mid g \in G\}$ olsun. $|A| = [G:P]$ dir. Şimdi Q. A üzerine $\forall y \in Q$ ve $gP \in A$ için $y(gP) = (yg)P$ şeklinde etki etsin.

Q bir p-grubu olduğundan Not 3.7.25(ii)den
$|A| \equiv |Fiks(Q)| \pmod{p}$ dir. Ayrıca $|A| = |G|/|P| = kp^n/p^n = k$
olduğundan $p \nmid |A|$ ve $Fiks(Q) \neq \emptyset$ dir.
$gP \in Fiks(Q)$ olsun. $y \in Q$ için $ygP = gP$ olduğundan
$g^{-1}ygP = P$ ve $g^{-1}yg \in P$ olur. Buradan $g^{-1}Qg \leq P$
bulunur. Ayrıca $|P| = |g^{-1}Qg|$ olduğundan
$P = g^{-1}Qg$ dir.

Teorem 3.8.30 (Üçüncü Sylow Teoremi) G sonlu bir grup ve G nin Sylow p-altgruplarının sayısı n_p olsun. O zaman $n_p = [G : N_G(P)]$ ve $n_p \equiv 1 \pmod p$ dir.

İspat: G nin bir sylow p-altgrubu P ve $A = \{ gPg^{-1} \mid g \in G \}$ olsun. Teorem 3.7.27 den G nin bütün sylow p-altgrupları P nin eşleniklerinden oluştuğundan $|A| = n_p$ dir. $|A| \equiv 1 \pmod p$ ve $|A| = [G : N(P)]$ olduğunu göstermek yeter. P, A üzerine eşleniklenme biçiminde etki etsin. P bir p-grubu olduğundan Not 3.8.27 ü den $|A| \equiv |Fiks(P)| \pmod p$ dir.

$P \in Fiks(P)$ olduğundan $Fiks(P) \neq \emptyset$ dir. Şimdi $gPg^{-1} \in Fiks(P)$ olsun. $\forall y \in P$ için $y(gPg^{-1})y^{-1} = gPg^{-1}$ olduğundan $(g^{-1}yg)P(g^{-1}y^{-1}g) = (g^{-1}yg)P(g^{-1}yg)^{-1} = P$ ve $g^{-1}yg \in N(P)$ olur. y keyfi seçildiğinden $g^{-1}Pg \leq N(P)$ dir. Buradan P ve $g^{-1}Pg$, $N(P)$ nin Sylow p-altgruplarıdır. İkinci Sylow teoreminden $h^{-1}g^{-1}Pgh = P$ olacak biçimde $h \in N(P)$ vardır. $gh \in N(P)$ olduğundan $g \in N(P)$ ve buradan $g^{-1}Pg = P$ bulunur. Dolayısıyla $Fiks(P) = \{P\}$ ve $|Fiks(P)| = 1$ dir. Bu değer yukarıda yerine konursa $|A| \equiv 1 \pmod p$ bulunur.

Şimdi $|A| = [G : N(P)]$ olduğunu görelim.

$x, y \in G$ için $xPx^{-1} = yPy^{-1} \iff (y^{-1}x)P(y^{-1}x)^{-1} = P$

$$\iff y^{-1}x \in N(P) \iff xN(P) = yN(P)$$

olduğundan $|A| = [G : N(P)]$ dir. Özel olarak $|A| \mid |G|$ dir.

Tanım 3.831 G bir grup ve $G \neq \{e\}$ olsun. Eğer G nin $\{e\}$ ve G'den başka normal altgrubu yoksa G ye basit grup denir.

Teorem 3.832 G bir değişmeli grup olsun. G'nin basit olması için gerek ve yeter şart p bir asal sayı olmak üzere $|G| = p$ olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ G basit grup olsun. $e \neq g \in G$ olsun. $\langle g \rangle \triangleleft G$ olduğundan $G = \langle g \rangle$ dir. Mümkünse G sonsuz olsun $g^2 \neq e$ olduğundan $G = \langle g^2 \rangle$ olur. Bu ise teorem 3.4.11 den dolayı bir çelişkidir. O halde G sonludur. $o(g) = n$ olsun. O zaman $|G| = n$ dir $n > 1$ olduğundan n'nin bir asal böleni vardır. Bu p olsun. $b = a^{n/p}$ alalım. $o(b) = p$ ve $\langle b \rangle = G$ dir. Dolayısıyla $p = n$ dir.

($\Leftarrow$) $|G|=p$ olsun. G nin her altgrubunun mertebesi grubun mertebesini böleceğinden G'nin çeşve G den başka altgrubu yoktur.

Örnek 3.8.33 S_4 simetrik grubunun $p=2,3$ için Sylow p-altgrubunu belirleyelim. $|S_4|=24=2^3.3$ tür. Öyleyse D_4 bir sylow 2-altgrubudur. Çünkü $|D_4|=2^3$ tür. Ayrıca $\langle(123)\rangle$, $\langle(124)\rangle$, $\langle(134)\rangle$, $\langle(234)\rangle$ altgruplarından her biri Sylow 3-altgrubudur.

Örnek 3.8.34 Mertebesi 35 olan grup basitmidir?

$|G| = 35 = 5.7$ $\quad n_5 = 1+5k \mid 7$ $\quad k=0$ ise $n_5 = 1$ 1 tane

Sylow 5- altgrubu vardır. Bu altgrup P ise

$P \triangleleft G$ dir. $5^m \mid |G|$, $5^{m+1} \nmid |G|$ $\quad m=1$ $\quad |P| = 5$ dir.

O halde G grubu basit değildir.

Örnek 3.8.35. Mertebesi 30 olan grup basit midir?

$|G| = 30 = 2.3.5$ $\quad n_2 = 1+2k \mid 15$ için $n_2=1$, $n_2=3$, $n_2=5$ ve $n_2=15$

$n_3 = 1+3t \mid 10$ için $n_3=1$, $n_3=10$

$n_5 = 1+5p \mid 6$ için $n_5=1$, $n_5=6$

$n_5=6$ ise farklı sylow 5-altgruplarının kesisimi $\{e\}$ olduğundan $4.6=24$

$n_3=10$ ise $2.10=20$ olup $24+20+1=45$ olması gerekir $45>30$ olup n_3 veya n_5 ten birisi 1 olmak zorunda 1 tane olan normal altgrup olup G basit değildir.

Örnek 3.8.36 Mertebesi 48 olan grup basit midir?

$|G| = 48 = 2^4 \cdot 3 \quad n_2 = 1+2k \mid 3 \quad n_2 = 1, \; n_2 = 3$

$n_2 = 1$ ise basit değil, $n_2 = 3$ olsun.

G nin birbirinden farklı iki sylow 2-altgrubu P ve Q olsun.

$$|PQ| = \frac{|P|.|Q|}{|P\cap Q|} = \frac{16.16}{|P\cap Q|} \leq 48 \qquad |P\cap Q| \geq 8 \text{ olmalıdır.}$$

$P\cap Q \neq P$ olduğundan $|P\cap Q| = 8$ bulunur.

$|PQ| = \frac{16.16}{8} = 32$ bulunur. $P\cap Q \leq P, Q$,

$P, Q \leq N_G(P\cap Q)$ olup $|N_G(P\cap Q)| \geq 32$, $|N_G(P\cap Q)| \mid 48$

olduğundan $|N_G(P\cap Q)| = 48$ olup $N_G(P\cap Q) = G$,

$P\cap Q \trianglelefteq G$ bulunur.

Kaynaklar

[1] Çallıalp, F. Örneklerle Soyut Cebir, İstanbul 2011
[2] Arıkan, A. Halıcıoğlu, S. Cebire Giriş, Ankara 2015
[3] Asar, A.O. Arıkan, A. Arıkan, A. Cebir, Ankara 2009
[4] Şenkon, H. Soyut Cebir Dersleri, İstanbul 1993
[5] Aydın, N. Kandamar, H. Soyut Cebir, İstanbul 2015

Teşekkürler

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

P – Gruplar ve Sylow Teoremleri

Prof. Dr. Şenol EREN

Ders 23