



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

P – Gruplar ve Sylow Teoremleri

Prof. Dr. Şenol EREN

Ders 22

Tanım 3.8.17 G bir grup ve $A \neq \emptyset$ olsun. Bir $\ast: G \times A \longrightarrow A$, $(g, a) \longrightarrow \ast((g, a)) = g \ast a$ fonksiyonu verilsin. Eğer

- i) $\forall a \in A$ için $e \ast a = a$
- ii) $\forall a \in A, \forall g, h \in G$ için $(gh) \ast a = g \ast (h \ast a)$ ise $\ast$ fonksiyonuna G 'nin A üzerine bir etkisi ve A 'ya bir G kümesi denir.

Uygulamada gerek olmadıkça, $g \ast a$ elemanı ga ile gösterilebilir.

Örnek 3.8.18 $\forall a \in A$ ve $\forall g \in G$ için $g \ast a = a$ ile tanımlı $\ast$ fonksiyonu G 'nin A üzerine bir etkisidir. Buna asikar etki denir.

Örnek 3.8.19 G bir grup $H \leq G$ olsun. $\forall h \in H, \forall g \in G$ için $h \times g = hg h^{-1}$ ile tanımlı $\times$ fonksiyonu H nin G üzerine bir etkisidir. Buna H nin G üzerine eşlenikleme etkisi denir.

$\forall h, k \in H, \forall g \in G$ için

$$\begin{aligned} (hk) \times g &= (hk)g(hk)^{-1} = (hk)g(k^{-1}h^{-1}) = h(kgk^{-1})h^{-1} \\ &= h \times (kgk^{-1}) = h \times (k \times g) \end{aligned}$$

ve $e \times g = eg e^{-1} = g$ dir.

Örnek 3.8.20 $G \leq S_n$ olsun. O zaman G, I_n üzerine doğal olarak etki eder. $\sigma \times i = \sigma(i)$. Kolaylıkla $I(i) = i$ ve $\forall \tau, \rho \in G$ için $\rho \tau(i) = \rho(\tau(i))$ dir.

Teorem 3.821 G grubu A kümesi üzerine etki etsin.

Aşağıdakiler sağlanır.

i) $\forall a, b \in A$ için $a \sim b \iff \exists g \in G$ olacak biçimde $ga = b$ vardır. $\sim$ A üzerinde denklik bağıntısıdır.

ii) $\forall a \in A$ için $G_a = \{g \in G \mid ga = a\} \leq G$ dir.

ispatı: $\forall a \in A$ için $ea = a$ olduğundan $a \sim a$ dir.

$a, b \in A$ için $a \sim b$ ise $ga = b$ dir. $g^{-1}(ga) = g^{-1}b$,
 $a = g^{-1}b$ olup $b \sim a$ dir.

$a, b, c \in A$ için $a \sim b \wedge b \sim c$ ise $ga = b \wedge hb = c$
 olacak şekilde $g, h \in G$ var. $h(ga) = c \Rightarrow (hg)a = c$
 olup $a \sim c$ dir.

ii) $ea = a$ olup $e \in G_a \Rightarrow G_a \neq \emptyset$. Şimdi $g, h \in G_a$ olsun. $ga = ha = a$ dir. Ayrıca $ha = a \Rightarrow h'a = a$ olup $h' \in G_a$ dir. Şimdi $(gh')a = g(h'a) = g(a) = ga = a$ olup $gh' \in G_a$ dolayısıyla $G_a \leq G$ dir.

Tanım 3.8.22 G grubu A kümesi üzerine etki etsin. $a \in A$ olsun a 'nın $\sim$ denklik bağıntısına göre denklik sınıfına G 'nin a 'yı içeren yörüngesi denir. ve $Orb_G(a)$ ile gösterilir. G_a alt grubunda a 'nın G içindeki dengeleyicisi denir.

Örnek 3.8.23 $S_3 = \{I, (12), (13), (23), (123), (132)\}$
 $A = \{1, 2, 3\}$ üzerine doğal etki etsin. $Orb_G(1)$ ve G_1 bulalım. $Orb_G(1) = \{1, 2, 3\}$ ve $G_1 = \{I, (23)\}$

Teorem 3.8.24 G sonlu bir grup ve A sonlu bir G -küme olsun.

- i) $\forall a \in A$ için $|Orb_G(a)| = [G:G_a]$ dir.
 ii) G nin A üzerindeki birbirinden farklı yörüngeleri $Orb_G(a_1), \dots, Orb_G(a_s)$ ise $|A| = \sum_{i=1}^s |Orb_G(a_i)| = \sum_{i=1}^s [G:G_{a_i}]$ dir.

İspat: i) $B = \{gG_a \mid g \in G\}$ olsun. $|B| = [G:G_a]$ dir.

O halde $|B| = |Orb_G(a)|$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$\varphi: Orb_G(a) \longrightarrow B$, $\varphi(ga) = gG_a$ olarak tanımlayalım.

$ga = ha \iff h^{-1}(ga) = a \iff (h^{-1}g)a = a \iff h^{-1}g \in G_a$

$\iff gG_a = hG_a$ olup φ iyi tanımlı ve 1-1 dir.

Ayrıca tanım gereği örten dir. Böylece iddia gösterilmiştir.

ii) G 'nin farklı bütün yörüngeleri $\text{Orb}_G(a_1), \dots, \text{Orb}_G(a_s)$ olsun. Tanım 3.8.22 den $A = \bigcup_{i=1}^s \text{Orb}_G(a_i)$ ve (i) den dolayı

$$|A| = \left| \bigcup_{i=1}^s \text{Orb}_G(a_i) \right| = \sum_{i=1}^s |\text{Orb}_G(a_i)| = \sum_{i=1}^s [G : G_{a_i}] \text{ bulunur.}$$

Tanım 3.8.25 G grubu kendi üzerine eşlenikleme biçiminde etki etsin. $\forall a \in G$ için G 'nin a 'yı içeren yörüngesine a 'nın eşlenik sınıfı denir ve $C(a)$ ile gösterilir. a 'nın dengeleyicisine de a 'nın G içindeki merkezleyeni denir ve $M(a)$ ile gösterilir.

Böylece $C(a) = \{gag^{-1} \mid g \in G\}$, $M(a) = \{g \in G \mid ga = ag\}$ dir.

Teorem 3.8.26 G sonlu bir grup olsun.

- i) $\forall a \in G$ için $|C(a)| = [G : M(a)]$ dir.
- ii) G nin bir birinden farklı bütün eşlenik sınıfları $C(a_1), \dots, C(a_s)$ olsun. O zaman

$$|G| = \sum_{i=1}^s [G : M(a_i)] \text{ dir.}$$

İspat: G kendi üzerine eşleniklenme biçiminde etki etsin.

- i) $a \in G$ olsun. Teorem 3.8.24 i den dolayı $|Orb_G(a)| = [G : G_a]$ dir. Tanım 3.8.25 den $C(a) = Orb_G(a)$ ve $M(a) = G_a$ olduğundan $|C(a)| = [G : M(a)]$ bulunur.

ii) G 'nin birbirinden farklı bütün eşlenik sınıfları $C(a_1), \dots, C(a_s)$ olsun. Teorem 3.8.24 (ii) uygulanırsa i) den dolayı $|G| = \sum_{i=1}^s |C(a_i)| = \sum_{i=1}^s [G:M(a_i)]$ ve

buradan $|G| = \sum_{i=1}^s [G:M(a_i)]$ bulunur.

Şimdi Sylow teoremlerine alt yapı hazırlayalım.
 $|A| = \sum_{i=1}^s |Orb(a_i)| = \sum_{i=1}^s [G:G_{a_i}]$ idi şimdi

$\text{Fiks}(G) = \{a \in A \mid ga = a, \forall g \in G\}$ olarak tanımlansın. $|\text{Fiks}(G)|$, uzunluğu bir olan yörünge sayısıdır. Uzunluğu birden büyük yörüngelerin birer temsiliyesi $b_1, \dots, b_r$ olsun.

$$|A| = |\text{Fiks}(G)| + \sum_{j=1}^r |Orb(b_j)| = |\text{Fiks}(G)| + \sum_{j=1}^r [G:G_{b_j}] \text{ dir.}$$

$A=G$ alınırsa G kendi üzerine eşleniklenme biçiminde etki etsin. $\text{Orb}(b_j) = C(b_j)$ ve $G_{b_j} = M(b_j)$ olduğundan

$$|G| = |\text{Fiks}(G)| + \sum_{j=1}^r |C(b_j)| = |\text{Fiks}(G)| + \sum_{j=1}^r [G : M(b_j)]$$

olur. Ayrıca $a \in \text{Fiks}(G)$ iken $[G : M(a)] = 1$ olduğundan $G = M(a)$ yani $a \in M$ dir. Dolayısıyla $\text{Fiks}(G) = M$ olup

$$|G| = |M| + \sum_{j=1}^r [G : C(b_j)] \text{ bulunur.}$$

Buna G nin sınıf denklemi denir.

Not 38.27

- i) (Cauchy) G sonlu bir grup ve G 'nin mertebesini bölen bir asal p olsun. O zaman G 'nin mertebesi p olan bir elemanı vardır.
- ii) $|G| = p^n$ olan bir grup A sonlu bir G -küme olsun. O zaman $|A| \equiv |\text{Fiks}(G)| \pmod{p}$ dir.
- iii) $k p^m$ elemanlı bir kümenin $[(k, p) = 1]$ p^m elemanlı altkümelerinin sayısı s ise $s \equiv k \pmod{p}$ dir.

Teşekkürler



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

P – Gruplar ve Sylow Teoremleri

Prof. Dr. Şenol EREN

Ders 22