ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

P – Gruplar ve Sylow Teoremleri

Prof. Dr. Şenol EREN

Ders 21

3.8 p- Gruplar ve Sylow Teoremleri

Tanım 3.8.1 G bir grup ve p bir asal sayı olsun. Eğer G grubunun her elemanının mertebesi p'nin bir kuvveti ise G'ye bir p-grup denir.

Örnek 3.8.2 $G = \langle i \rangle$ devirli grubunu göz önüne alalım. Grupta $o(1) = 1 = 2^0$, $o(-1) = 2 = 2^1$, $o(i) = o(-i) = 4 = 2^2$ o halde $G = \langle i \rangle$ grubu bir 2-gruptur.

Not 3.8.3 i) Bir p-grup sonlu ya da sonsuz olabilir.
ii) Sonlu bir grubun p-grup olması için gerek ve yeter şart grubun mertebesinin p nin bir kuvveti olmasıdır.
iii) Bir grubun değişmeli olması ile p-grup olması arasında bir ilişki yoktur.

Tanım 3.8.4 G sonlu değişmeli bir grup, p asal sayı ve $p \mid |G|$ olsun.

$$G_p = \{ x \in G \mid o(x) = p^r \text{ olacak biçimde } r \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \text{ vardır} \}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.8.5 G sonlu değişmeli bir grup, p bir asal sayı ve $p \mid |G|$ olsun. Bu durumda $G_p \leq G$ dir.

İspat: $0 \in G$ için $o(0) = 1 = p^0$ olup $0 \in G_p \Rightarrow G_p \neq \emptyset$ dir.

Ayrıca $x \in G_p$ için $x \in G$ olup $G_p \subseteq G$ dir.

$x, y \in G_p \Rightarrow o(x) = p^r$, $o(y) = p^s$ olacak şekilde $r, s \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ vardır. $o(y) = p^s$ ise $o(-y) = p^s$ dir. Genelliği bozmadan maks$\{r, s\} = r$ alalım.

$$p^r(x - y) = p^r x + p^r(-y) = p^r x + p^{r-s} \cdot p^s(-y)$$
$$= 0 + p^{r-s} \cdot 0 = 0 + 0 = 0 \text{ olup } o(x-y) \mid p^r \text{ dir.}$$

Böylece $x - y \in G_p$ ve $G_p \leq G$ bulunur.

Uyarı 3.8.6 Her grup p-grup olmak zorunda değildir. Eğer G sonlu değişmeli bir grup p bir asal sayı ve $p \mid |G|$ ise G nin en geniş p-altgrubu G_p dir.

Örnek 3.8.7 $G = \mathbb{Z}_{12}$ grubu için $|G| = 12 = 2^2 \cdot 3$ olup $\mathbb{Z}_{12}$ p-grup değildir. G nin G_2 ve G_3 alt grupları vardır.

$$G_2 = \{ \bar{x} \in G \mid o(\bar{x}) = 2^r \text{ olacak biçimde } r \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \text{ vardır} \}$$
$$= \{ \bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9} \} = \langle \bar{3} \rangle$$

Benzer şekilde

$$G_3 = \{ \bar{0}, \bar{4}, \bar{8} \} = \langle \bar{4} \rangle$$

Tanım 3.8.8 G sonlu bir grup, p bir asal sayı, $m \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $p^m \mid |G|$ ve $p^{m+1} \nmid |G|$ olsun. Bu durumda G grubunun mertebesi p^m olan altgrubuna Sylow p- altgrubu adı verilir.

Örnek 3.8.9. $S_3 = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}$ grubunu göz önüne alalım. $|S_3| = 6 = 2.3$ olduğundan Sylow 2-altgrubu ve Sylow 3-altgrupları vardır. $H_1 = \langle (1,2) \rangle = \{(1), (12)\}$, $H_2 = \langle (1,3) \rangle = \{(1), (13)\}$ $H_3 = \langle (2,3) \rangle = \{(1), (23)\}$ Sylow 2- altgruplarıdır.
$H_4 = \langle (123) \rangle = \langle (132) \rangle = \{(1), (123), (132)\}$ Sylow 3- altgrubudur.

Tanım 3.8.10 G bir grup ve $H \leq G$ olsun. $g \in G$ için $gHg^{-1} = \{ghg^{-1} \mid h \in H\}$ kümesi G nin altgrubudur. gHg^{-1} altgrubuna H altgrubunun g ile eşleniği adı verilir.

Teorem 3.8.11 G sonlu bir grup ve $a \in G$ olsun. O zaman $|C(a)| = [G : M(a)]$ dır.

İspat: X' $M(a)$ nın G içindeki farklı sol kalan sınıflarının kümesi olsun. ($M(a) \leq G$ olduğunu biliyoruz)
$T : X' \longrightarrow C(a)$, $T(xM(a)) = xax^{-1}$ ile tanımlansın.
T 1-1 ve örtendir. (Gösteriniz). Buradan $|X'| = |C(a)|$ dır. $|X'| = [G : M(a)]$ olduğundan $|C(a)| = [G : M(a)]$ bulunur.

Sonuç 3.8.12 G sonlu bir grup ve $a \in G$ olsun. O zaman $|C(a)| \mid |G|$ dir.

İspat: Teorem 3.8.11 den $|C(a)| = [G : M(a)]$ dır.
$[G : M(a)] = \dfrac{|G|}{|M(a)|}$ olduğundan $|G| = |C(a)|\,|M(a)|$ dir.

Sonuç 3.8.13 G sonlu bir grup ise

$|G| = \sum [G : M(a)]$ dır. Buradaki toplam G nin her bir eşlenik sınıfından seçilen bir eleman üzerindedir.
Sonuç 3.8.13 deki eşitliğe G'nin sınıf denklemi denir.
Sınıf denklemi $|G| = |M| + \sum [G : M(a)]$ şeklinde de ifade edilebilir. $|C(a)| = 1$ olması için gerek ve yeter şart $a \in M$ olmasıdır.
$(a \in M \Leftrightarrow \forall x \in G,\ xa = ax \Leftrightarrow \forall x \in G,\ xax^{-1} = a \Leftrightarrow C(a) = \{a\})$

Teorem 3.8.14 G aşikar olmayan sonlu bir grup ve p asal bir tam sayı olsun. G nin p grup olması için gerek ve yeter şart $|G| = p^k$ olacak şekilde bir k pozitif tam sayısının olmasıdır.

İspat ($\Longrightarrow$) G p-grup olsun. Eğer $q \neq p$, $q \mid |G|$ ise Cauchy teoremi gereğince G'de mertebesi q olan bir eleman olur ki bu G nin p-grup olması ile çelişir. dolayısıyle $|G| = p^k$, $k \in \mathbb{Z}^+$ vardır.

($\Longleftarrow$) $|G| = p^k$, $k \in \mathbb{Z}^+$ olsun. Lagrance Teoremine göre G nin her elemanının mertebesi p nin bir kuvvetidir. Böylece G bir p-gruptur.

Teorem 3.8.15 Sonlu bir p-grubun merkezi birimden farklıdır.

İspat: p asal, $n \geq 1$ ve $|G| = p^n$ olsun. $a \in G$ için $M(a) \leq G$ ve Lagrange Teoremine göre $|M(a)| \,|\, |G| = p^n$ olduğundan $0 \leq n_a \leq n$ için $|M(a)| = p^{n_a}$ dır.

$a \in M \iff M(a) = G \iff n_a = n$ denklikleri göz önüne alınarak eşlenik sınıf denklemi yazılırsa

$$|G| = p^n = |M| + \sum \frac{p^n}{p^{n_a}} = |M| + \sum p^{n-n_a}$$ bulunur.

Bu eşitlikten $p \,|\, |M|$ bulunur. O halde $|M| > 1$ dir.

Sonuç 3.8.16 p asal tam sayı olmak üzere p^2 mertebeli grup değişmelidir.

İspat: G grubu değişmeli $\Leftrightarrow M = G$ dir. Önceki teoreme göre $|M| \neq 1$ ve $|M| \mid p^2$ olacağından $|M| = p \vee |M| = p^2$ olur. Eğer $|M| = p$ olmadığını gösterirsek ispat tamamlanır.

$|M| = p$ olsun. $\exists a \in G-M$ alalım. $M < M(a)$ ve $M \neq M(a)$ olacağından $|M(a)| > p$ ve $|M(a)| \mid p^2$ yani $|M(a)| = p^2$ ve $M(a) = G$ bulunur.

$M(a) = G \Leftrightarrow a \in M$ olduğundan $a \in G-M$ olması ile çelişir. O halde $|M| = p$ olamaz.

Teşekkürler

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

P – Gruplar ve Sylow Teoremleri

Prof. Dr. Şenol EREN

Ders 21