



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Dijital Ders Platformu

Seriler – Pozitif terimli seriler için
yakınsaklık testleri,

Prof. Dr. Cenap DUYAR

Ders 6

- 69 -

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ıraksak $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ıraksak önermeleri doğrudur.

İspat. $\sum a_n$ ve $\sum b_n$ serilerinin kısmi toplam-
lar dizileri sırasıyla (s_n) ve (t_n) olsun. Ka-
bulümüze göre $\forall n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq s_n \leq t_n$ ve (s_n)
ile (t_n) dizileri monoton artandır.

(i) (t_n) yakınsaksa, aynı zamanda sınırlıdır.
 $\forall n \in \mathbb{N}$ için $t_n \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ alın-
sın. O zaman $\forall n \in \mathbb{N}$ için $s_n \leq M$ dir. O halde
 (s_n) monoton artan ve üstten sınırlı bir
dizi olup, yakınsaktır. Böylece $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi
yakınsak olur.

(ii) Bu önermenin doğruluğu (i) den çıkar.
SONUÇ (Limit Karşılaştırma Testi).

(a_n) ve (b_n) pozitif terimli diziler olsun,

(a) $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ limitinin var ve sonlu olduğu-

nu kabul edelim. O zaman aşağıdaki iki özellik gerçekleşir:

(i) Eğer $l > 0$ ise, o zaman

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ yakınsak} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ yakınsak.}$$

(ii) Eğer $l = 0$ ise, o zaman

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ yakınsak} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ yakınsak.}$$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ ise, o zaman

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ yakınsak} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ yakınsak.}$$

İspat. (a) $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ olduğunu kabul edelim.

(i) $l > 0$ olsun. O zaman $\forall \varepsilon > 0$ verilğinde $\exists N \in \mathbb{N}$ için

$$l - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < l + \varepsilon$$

olacak şekilde $\exists N \in \mathbb{N}$ vardır. Den k olarak

$\forall n \geq N$ için

$$(l - \varepsilon)b_n < a_n < (l + \varepsilon)b_n$$

sezilir. $\varepsilon = l/2$ seçimi halinde $\forall n \in \mathbb{N}$ için

-71-

$$\frac{l}{2} b_n < a_n < \frac{3.l}{2} b_n$$

elde ederiz. Bu durumda karşılaştırma testinden sonuçta gidebilir.

(ii) $l=0$ olsun. 0 zaman $\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde $\forall n \geq N$ için $-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < \varepsilon$ olacak şekilde $\exists N \in \mathbb{N}$ vardır. Özel olarak $\forall n \geq N$ için $a_n > \varepsilon b_n$ yazabiliriz. Bundan dolayı karşılaştırma testi ile sonuçta gidebilir.

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ kabul edilirse, $\forall n \geq N$ için $\frac{a_n}{b_n} \geq 1$ (veya $a_n \geq b_n$) olacak şekilde $\exists N \in \mathbb{N}$ vardır. 0 zaman karşılaştırma testine göre istenen elde edilir.

ÖRNEK. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $2^{n-1} \leq n!$ olması kullanılırsa, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$ yazılır. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ geometrik serisi yakınsak olduğundan karşılaştırma testi gereğince $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ yakınsaktır.

-72-

ÖRNEK. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisi ıraksak olduğundan, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ ıraksaktır. Ayrıca $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1/n)}{(1/\sqrt{n})} = 0 = l$ olup, limit karşılaştırma testine göre de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ serisinin ıraksak olduğu söylenebilir.

Teorem 15 (De'Alembert'in Oran Testi). (a_n) pozitif terimli bir dizi olmak üzere $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ var olsun.

0 zaman aşağıdaki özellikler gerçekleşir:

(i) Eğer $l < 1$ ise, o zaman $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsaktır,

(ii) Eğer $l > 1$ ise, o zaman $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ıraksaktır.

İspat. (i) $l < q < 1$ olacak şekilde bir q sayısı seçilsin. 0 zaman $q - l > 0$ olup, limit tanımına göre $\forall n \geq N$ için

-73-

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - l \right| < q - l \text{ (veya } l - q < \frac{a_{n+1}}{a_n} - l < q - l)$$

olacak şekilde $\exists N \in \mathbb{N}$ vardır. Özel olarak $\forall n \geq N$ için $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$ ve böylece $\forall n \geq N$ için

$$a_{n+1} < q a_n < q^2 a_{n-1} < \dots < q^n a_1$$

olur. $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ yakınsak ($q < 1$ den) olduğundan karşılaştırmaya testine göre $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinde yakınsak olur.

(ii) $l > 1$ olsun ve $1 < p < l$ olacak şekilde bir p sayısı seçilsin. O zaman $l - p > 0$ olup, limit tanımına göre $\forall n \geq N$ için

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - l \right| < l - p \text{ (veya } p - l < \frac{a_{n+1}}{a_n} - l < l - p)$$

olacak şekilde $\exists N \in \mathbb{N}$ vardır. Özel olarak $\forall n \geq N$ için

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > p > 1$$

olacaktır. Bundan (a_n) pozitif terimli

- 15-74-
dizisinin artan ve dolayısıyla $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$
çıkar. Buna göre $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ıraksaktır.

Teorem 16 (Cauchy'nin Kök Testi). (a_n) pozitifel
terimli bir dizi olmak üzere

$$R = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n^{1/n}$$

olsun. 0 zaman, eğer $0 \leq R < 1$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ya-
kınsak ve eğer $1 < R \leq \infty$ ise ıraksaktır.

İspat. $0 \leq R < 1$ olsun. Eğer $0 < R < 1$ ise $R < s < 1$ olacak
şekilde bir s sayısı seçelim. ve

$$t = \frac{R}{s}, \quad R < t < 1$$

olsun. Eğer $R = 0$ ise herhangi bir $0 < t < 1$ seçelim.

$t > R = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n^{1/n}$ olduğunda üst limit tanımına göre $\forall n > N$
için

$$a_n^{1/n} < t$$

olacak şekilde $\exists N \in \mathbb{N}$ vardır. Bu nedenle $\forall n > N$ için
 $a_n < t^n$ olup, $0 < t < 1$ olduğuna göre $\sum_{n=1}^{\infty} t^n$ geometrik
serisi yakınsak, karşılaştırma testine göre $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsaktır.

- 75 -

Şimdi $1 < R \leq \infty$ olsun. Eğer $1 < R < \infty$ ise $1 < s < R$ olacak şekilde bir s sayısı seçelim ve

$$t = \frac{R}{s}, \quad 1 < t < R$$

olsun. Eğer $R = \infty$ ise herhangi bir $1 < t < \infty$ seçelim. $t < R = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n^{1/n}$ olduğundan üst limit tanımına göre sonsuz çokluk $n \in \mathbb{N}$ için

$$a_n^{1/n} > t$$

olur. Bundan dolayı sonsuz çoklukta $n \in \mathbb{N}$ için $a_n > t^n$ olup, $t > 1$ olduğuna göre $\lim_{n \rightarrow \infty} t^n \neq 0$, böylece $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ olur ve buna göre $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ıraksaktır.

HATIRLATMA. (a_n) bir reel sayı dizisi ve A ise bu dizinin tüm yakınsak alt dizilerinin limitlerinin (limit veya yığılma noktalarının kümesi) olsun. Bu takdirde

$$c = \max A \quad \text{ve} \quad d = \min A$$

sayılarına (a_n) dizisinin üst ve alt limiti denir, $c = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ ve $d = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ yazılır.

-78-

NOT. Hem oran hem de kök testinin $l=1$ durumu ($R=1$ durumu) için sonuç vermez. Bu hallerde başka yollara başvurmalıyız.

ÖRNEK. Her $x \in \mathbb{R}$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ serisi yakınsaktır.
Burada $a_n = \frac{x^n}{n!}$ dir. Bundan dolayı $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x}{n+1}$$

olar, böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1$$

olacağından Oran testine göre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ serisi $\forall x \in \mathbb{R}$ için yakınsaktır.

ÖRNEK. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ serisi yakınsaktır, çünkü $a_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

olup, böylece $a_n^{1/n} = \frac{n}{2n+1}$ ve $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{1/n} = \frac{1}{2} < 1$ elde edilir, o halde kök testine göre $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ serisi yakınsaktır.

- 77 -

ÖRNEK. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ serisini düşünelim. Bu seri için $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ olup, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{1/n}$ olduğunu görebiliriz. Öte yandan bu serinin kısmi toplamlar dizisi (S_n) olmak üzere $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

olur ve $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$ dir.

Yani oran ve kök testleri sonuç vermezken, serinin yakınsak olabileceğini görebildik.

Teorem 17 (Cauchy Yoğunluk Testi). (a_n) pozitif terimli ve azalan bir dizi olsun. 0 zaman $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsak $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ yakınsak olur.

İspat. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsak bir seri olsun. $\{a_n\}$ bir azalan dizi olduğundan,

$$2^{k-1} a_{2^k} = a_{2^k} + a_{2^k} + \dots + a_{2^k}$$

$$\leq a_{2^{k-1}+1} + a_{2^{k-1}+2} + \dots + a_{2^{k-1}+2^{k-2}} + a_{2^k} = \sum_{m=2^{k-1}+1}^{2^k} a_m$$

yazabiliriz. Bundan dolayı

$$\sum_{k=1}^N 2^{k-1} a_{2^k} \leq \sum_{k=1}^N \left(\sum_{m=2^{k-1}+1}^{2^k} a_m \right) = \sum_{m=2}^{2^N} a_m$$

elde ederiz. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsak olduğundan

sağdaki kısmi toplamlar sınırlıdır. Bundan dolayı soldaki kısmi toplamlar sınırlıdır.

Tüm terimler pozitif olduğundan, bu kısmi toplamlar üstten sınırlı olan bir artan dizi

-79-

oluşturun. Böylece $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} a_{2k}$ serisi yakınsak olmalıdır. Buna göre 2 ile gruba yakınsaklığı değiştirilmeyecektir ve bundan dolayı $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2k}$ yakınsaktır.

Şimdi $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2k}$ yakınsak olsun.

$$\sum_{m=2^{k-1}+1}^{2^k} a_m = a_{2^{k-1}+1} + a_{2^{k-1}+2} + \dots + a_{2^{k-1}+2^{k-2}} + a_{2^k}$$

$$\leq a_{2^{k-1}} + a_{2^{k-1}} + \dots + a_{2^{k-1}} + a_{2^{k-1}} = 2^{k-1} a_{2^{k-1}}$$

esitsizliği geçerlidir ve buna benzer olarak

$$\sum_{m=2}^{2^N} a_m = \sum_{k=1}^N \left(\sum_{m=2^{k-1}+1}^{2^k} a_m \right) \leq \sum_{k=1}^N 2^{k-1} a_{2^{k-1}}$$

elde ederiz. Hipoteze göre sağ yandaki kısmi toplamlar dizisi sınırlıdır, bundan dolayı sol yan üstten sınırlı olan bir artan dizi biçimlendiren. Dolayısıyla $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsaktır.

SONUÇ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ yakınsak $\Leftrightarrow p > 1$.

İspat. Eğer $p < 0$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = \infty$ olacağından $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ıraksaktır.

Eğer $p > 0$ ise, o zaman

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^p} = \sum_{n=1}^{\infty} (2^{1-p})^n$$

serisini düşünelim. Sağ yan bir geometrik seridir. Böylece eğer $0 < p \leq 1$ ise, o zaman $2^{1-p} \geq 1$, bundan dolayı $\sum_{n=1}^{\infty} (2^{1-p})^n$ ıraksaktır; eğer $p > 1$ ise, o zaman $2^{1-p} < 1$ ve dolayısıyla $\sum_{n=1}^{\infty} (2^{1-p})^n$ yakınsaktır. Şimdi Cauchy Yönlü Testinden sonuca ulaşılır.

TEOREM 18 (Parçalara göre toplama). $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ dizileri verilsin. $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ n-nci toplam olsun. O zaman $0 \leq m \leq n$ için

$$\sum_{j=m}^n a_j b_j = [S_n b_n - S_{m-1} b_m] + \sum_{j=m}^{n-1} S_j (b_j - b_{j+1})$$

olur.

-8.1-

İspat. Sadece indislere dikkat ederek

$$\begin{aligned}\sum_{j=m}^n a_j b_j &= \sum_{j=m}^n (S_j - S_{j-1}) b_j = \sum_{j=m}^n S_j b_j - \sum_{j=m}^n S_{j-1} b_j \\ &= \sum_{j=m}^n S_j b_j - \sum_{j=m-1}^{n-1} S_j b_{j+1} \\ &= \sum_{j=m}^{n-1} S_j (b_j - b_{j+1}) + (S_n b_n - S_{m-1} b_m)\end{aligned}$$

elde ederiz.

Teorem 19 (Dirichlet'in Testi). $\sum a_n b_n$ serisi verilsin ve aşağıdaki üç özelliğin gerçektendiği kabul edilsin:

- (i) $S_N = \sum_{n=1}^N a_n$ kısmi toplamları bir sınırlı dizi oluşturuyor;
- (ii) (b_n) dizisi azalan;
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

O zaman $\sum a_n b_n$ yakınsaktır.

İspat. Önce (S_n) kısmi toplamlar dizisinin K sayısı ile sınırlandırıldığını kabul edelim.

- 82 -

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ olduğunu için $\forall n \geq N$ için $|b_n| < \varepsilon/2K$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ seçebiliriz. Önceki teoremi kullanarak

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=m}^n a_j b_j \right| &= \left| (S_n b_n - S_{m-1} b_m) + \sum_{j=m}^{n-1} S_j (b_j - b_{j+1}) \right| \\ &\leq K |b_n| + K |b_m| + K \sum_{j=m}^{n-1} |b_j - b_{j+1}| \end{aligned}$$

elde ederiz. Aynı (b_n) dizisi 0 sayısının azalarak yaklaştığından bu dizinin tüm terimleri pozitif ve yukarıdaki toplamın içindeki tüm mutlak değerler gereksizdir. Buna göre $\sum_{j=m}^{n-1} (b_j - b_{j+1}) = b_m - b_n$ olduğundan

$$\left| \sum_{j=m}^n a_j b_j \right| \leq K(b_n + b_m + b_m - b_n) = 2K b_m$$

elde ederiz. O zaman önceden belirlenen $N \in \mathbb{N}$ yi dikkate alırsak, $\forall n, m \geq N$ için

$$\left| \sum_{j=m}^n a_j b_j \right| < 2K \frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon$$

olur.

Bu $\sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j$ serisinin kısmi toplamlar dizisinin Cauchy dizisi olduğunu ve böylece bu serinin yakınsak olduğunu gösterir.

- 83 -

Teorem 20 (Abel'in Testi). $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serisinin yakınsak ve (a_n) dizisinin monoton ve sınırlı olduğunu kabul edelim. O zaman $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ yakınsaktır.

İspat. $b_0 = 0$ ve $B_N = \sum_{k=0}^N b_k$ olsun. O zaman $b_n = B_n - B_{n-1}$ ($\forall n \geq 1$) olur. Bundan dolayı

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N a_k b_k &= \sum_{k=1}^N a_k (B_k - B_{k-1}) = a_1 (B_1 - B_0) + a_2 (B_2 - B_1) + \dots + a_N (B_N - B_{N-1}) \\ &= B_1 (a_1 - a_2) + B_2 (a_2 - a_3) + \dots + B_{N-1} (a_{N-1} - a_N) + a_N B_N \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} B_k (a_k - a_{k+1}) + a_N B_N \quad \dots (*) \end{aligned}$$

elde edilir. (a_n) monoton ve sınırlı olması için yakınsaktır, yine $\sum b_n$ yakınsak olduğu için (B_N) kısmi toplamlar dizisi yakınsaktır. Böylece $(a_N B_N)$ dizisi de yakınsak olur. $\sum b_n$ yakınsak olduğunun için $|B_N| \leq M$ olacak şekilde bir M sayısı vardır. (a_n) dizisinin monoton olduğunu kullanarak,

$$\sum_{k=1}^N |B_k (a_k - a_{k+1})| \leq M \sum_{k=1}^N |a_k - a_{k+1}| = M |a_1 - a_{N+1}|$$

- 84 -

ve $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ olduğunda $\lim_{N \rightarrow \infty} |a_1 - a_{N+1}| = M |a_1 - a|$ olduğundan dolayı $\sum_{k=1}^{\infty} B_k (a_k - a_{k+1})$ mutlak yakınsaktır. O halde (*) gereğince $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ yakınsak olur.

ÖRNEK. $\sum a_n$ yakınsak ise o zaman $\sum n^{1/n} a_n$ ve $\sum (1 + \frac{1}{n})^n a_n$ serilerinde yakınsaktır.

Çözüm. $f(x) = x^{1/x}$ fonksiyonunun $x > e$ olduğunda azalan olduğunu görmek kolaydır. Böylece $(n^{1/n})$ azalan bir dizedir. $((1 + \frac{1}{n})^n)$ dizisinin artan olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned} (1 + \frac{1}{n})^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \dots + \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} + \dots + \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + 2(1 - \frac{1}{n}) + \dots + (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \dots (1 - \frac{p-1}{n}) \frac{1}{p!} + \dots + \frac{1}{n^n} \end{aligned}$$

$$\text{ve } (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} = 1 + 1 + (1 - \frac{1}{n+1})(1 - \frac{2}{n+1}) \dots (1 - \frac{p-1}{n+1}) \frac{1}{p!} + \dots + \frac{1}{(n+1)^{n+1}}.$$

- 85 -

Sen toplam öncekinden bir tane daha fazla terime (pozitif olan) sahiptir ve her biri terimi diğerinin karşılık gelen teriminden küçük değildir. Bundan dolayı her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

olup $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ artan bir dizedir. Aynı zamanda $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ olduğundan $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ monoton ve sınırlıdır.



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Cenap DUYAR

Analiz III

Seriler – Pozitif terimli seriler
için yakınsaklık testleri,

Ders 6