



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Dijital Ders Platformu

Seriler – Zenon paradoksu, Seriler
için yakınsaklık tanımı,
Alıştırmalar

Prof. Dr. Cenap DUYAR

Ders 5

2. Bölüm

Seriler

Şimdi bir 'sonsuz seri' diye adlandırılacak şeyi biçimlendirmek için bir reel sayı dizisinin tüm terimlerini birlikte topladığımız zaman neler olabileceğini araştıracağız.

Eski Yunanlılar bunu önceden merak ettiler ve bunu tam anlamak için araştırmaya sahip değildiler. Bu eski Aşil ve Kaplumbağa hikayesi ile gösterilmektedir.

Zenon'un Paradoxu (Aşil ve Kaplumbağa): Hızlı bir kosucu olan Aşil'den bir kaplumbağaya karşı yarışı kazanması istenildi. Aşil saniyede 10 metre, kaplumbağa saniye 5 metre koşabiliyor. Yarış pisti 100 metre uzunluğundadır. Achil bir sporcu

olan Aşıl, kaplumbağaya 10 metre evans verir. Yarışı kim kazanacaktır. Her ikisi de koşmaya başlar, kaplumbağa 10 metre ileridedir. Bir saniye sonra Aşıl, kaplumbağanın başladığı noktaya ulaşır. Bu sırada kaplumbağa 5 metre koştu. Aşıl koşmaya devam eder ve kaplumbağanın bu 5 metre sonunda vardığı noktaya ulaşır. Bu sırada kaplumbağa 2.5 metre koşmuştur. Aşıl kaplumbağa bu 2.5 metre sonunda vardığı noktaya ulaşır. Bu sırada kaplumbağa 1.25 metre ileriye koşmuştur. Bu bir süre devam eder, ama Aşıl bir saniye önce kaplumbağanın elakt önce olduğu noktaya ulaşmayı başardığında, kaplumbağa yine biraz mesafe katetmiştir ve hata Aşıl'ın önündedir.

Bundan dolayı istediği kadar Aşil her seferinde, elbette yarımamayacağına imā eden, kaplur yarısı kadar yaklaşır. Böylece, mutlu etmeyecek bir sonuç olumbāğā yarısı kazanacağı sünnme bığımında yanlır olar.

Aşil ve kaplumbāğā arasında göz atalım:

Zaman	Fark
$t=0$	10 metre
$t=1$	$5=10/2$ metre
$t=1+1/2$	$2.5=10/4$ metre
$t=1+1/2+1/4$	$1.25=10/8$ metre
$t=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$	$0.625=10/16$ metre

ve böyle devam eder. Genel olarak ekilen şudur:

Zaman	Fark
$t=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^n}$	$\frac{10}{2^n}$ metre

-58-

Aşıl ve kaplum bəgə ərazindəki uzaqlığın 'sıfır' olduğu zamanı ögrenmek için ' $n \rightarrow \infty$ ' iken limit almak isteriz. Ama bu zaman için yukarıdaki ifadəyə sonsuz sayıda sayı eklemeyi isteriz ve Yunanlılar ve Zenon bunun nasıl yapılacağını bilemiyorlar. Bununla birlikte, eğer

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

tənnim yapıhrsa, o zaman bu eəitliğı önce 2 ile böldükten sonra bundən çıkarmakla

$$S_n - \frac{1}{2} S_n = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$$

veya

$$S_n = 2 \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right)$$

elele edilir. Simeli S_n limitlerin nasıl alınacağı bilindiğinde basit bir dizi'dir. Gerçekten $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2$ olduğu aşiktir.

Bundan dolayı Aşil'in tam olarak 2 saniyede kaplumbağayı yakalayacağını, elbette onu geçeceğini ve yarışı da kazanacağını matematiksel olarak doğru şekilde hesaplanmış oldu. Sonsuz çoklukta sayı içermeyen çok daha basit bir hesaplama aynı sonucu verir:

- Aşil saniye 10 metre koşuyor, 2 saniyede 20 metre kat ediyor.
- Kaplumbağa saniyede 5 metre koşuyor ve 10 metre avantajı sahiptir.
- Bu nedenle her ikisi 2 saniye sonra baş başa gelir.

Elbette, Aşil 10 saniye sonra, kaplumbağa 18 saniye sonra yarışı bitirecek ve Aşil yarışı kazanacaktır. Zenon paradoksuyla ilgili sorun, Zenon'un sonsuz sayıda sayı eklemekten rahatsız olmamasıydı. Gerçekten, onun basit ar-

gümanı, eğer sonsuz ~~çoklukta~~ sayıyı toplarsanız, o zaman bu sayılar ne olursa olsun, sonsuzluğa sahip olmalıydınız. Eğer bu doğru olsaydı, Asil'in kaplumbağayı yakalaması sonsuz uzun sürecekti ve o yarışı kaybedecekti. Bununla birlikte sonsuz toplamı bir dizinin limitine indirgeyerek, bu iddianın yanlış olduğunu görebiliriz.

Şimdi zaman işi verdiğimiz sonsuz toplamı bir anlam vereceğiz.

Kabaca söylersek, bir seri bir dizinin toplamıdır.

Eğer $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ bir dizi ise, o zaman onunla ilgili seri

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

dur.

-61-

 $\forall n=0,1,2,\dots$ için

$$S_n = \sum_{i=0}^n a_i$$

olmak üzere $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ dizisine bu serinin 'kısmi toplamlar dizisi' denir. Böylece

$$S_0 = a_0, S_1 = a_0 + a_1, S_2 = a_0 + a_1 + a_2, \dots$$

yazılır.

Eğer kısmi toplamlar dizisi yakınsak ise seri yakınsak, aksi halde seri ıraksaktır.

ÖRNEK. Eğer $a_n = kx^n$ ise, o zaman $\sum_{n=0}^{\infty} kx^n$ ye 'geometrik seri' denir. Kendine özgü bir kısmi toplam

$$S_n = k + kx + kx^2 + \dots + kx^n = k(1 + x + x^2 + \dots + x^n)$$

biçimindedir.

- 62 -

$$\begin{aligned}
 S_n(1-x) &= k(1+x+x^2+\dots+x^n) \cdot (1-x) \\
 &= k(1+x+x^2+\dots+x^n) - k(1+x+x^2+\dots+x^n) \cdot x \\
 &= k(1+x+x^2+\dots+x^n) - x - x^2 - x^3 - \dots - x^n - x^{n+1} \\
 &= k(1-x^{n+1})
 \end{aligned}$$

ve böylece

$$S_n = k \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

olacağını görürüz.

Eğer $|x| < 1$ ise, o zaman $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$, böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(k \cdot \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \right) = \frac{k}{1-x}$$

olur. Böylece $|x| < 1$ ise geometrik seri $k/(1-x)$ değerine yakınsar.

Örneğin $k=1$ ve $x=1/2$ olduğunda

$$S_n = \frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2} = \frac{2^{n+1}-1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n} \text{ ve } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-1/2} = 2$$

olur. Ayrıca aşikar olarak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Serilerin yakınsaklığı, kısmi toplam-
lar dizisinin yakınsaklığı olarak tanımla-
dığımız göre, dizilerin yakınsaklığına
dair özellikler kullanılarak aşağıdaki teo-
remin gerçekleştirildiğini görmek zor değil-
dir.

TEOREM 12. $\sum a_n$ ile $\sum b_n$ yakınsak seriler
ve $c \in \mathbb{R}$ bir sabit olsun. O zaman

(1) $\sum c a_n$ yakınsak ve $\sum c a_n = c \sum a_n$ dir,

(2) $\sum (a_n + b_n)$ yakınsak ve

$$\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$$

olur,

NOT. Eğer $\sum a_n$ ve $\sum b_n$ seriler ıraksak ise
 $\sum (a_n + b_n)$ ıraksak olmayabilir. Gerçekten
 $\forall n$ için $a_n = 1$ ve $b_n = -1$ ise $\sum a_n$ ve $\sum b_n$
ıraksak, ama $\sum (a_n + b_n) = \sum (1 + (-1)) = \sum 0 = 0$ dir.

-64

Teorem 13. Eğer $\sum a_n$ yakınsak ise o zaman $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ dir.

İspat. $\sum a_n$ yakınsak ise, (S_n) bu serinin kısmi toplamlar dizisi olmak üzere, bir $L \in \mathbb{R}$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = L$ dir. O zaman $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = L$ olacağından

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = L - L = 0$$

olur ve her n için

$$S_n - S_{n-1} = (a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n) - (a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1}) = a_n$$

olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ olur. $\#$

Bu teorem kolay bir iraksaklık testi sunar:

Eğer bir $\sum a_n$ serisi verildiğinde $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ limiti yoksa veya '0'dan farklı bir değere sahipse, bu seri iraksaktır.

- 65 -

Ayrıca teoremin tersinin doğru olmadiğini unutmayınız:

Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ise, o zaman $\sum a_n$ serisi yakınsak olmayabilir.

ÖRNEK. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisinin iraksak olduğunu gösterehim:

Burada teoremi uygulayamayız, zira $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) = 0$ olur.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{16} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \underbrace{\frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}}_{8 \text{ tane}} \\ \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

ve böyle devam edilsin. O zaman ilk 2^k tane terimi eklemekle

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^k} > 1 + \frac{k}{2}$$

-68-

yazabiliriz. Böylece her n için

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^k} > 1 + \frac{k}{2}$$

yazılabilecek şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ vardır, buna göre $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ çıkar. Burada $2^k \leq n$ olacak şekilde en büyük $k \in \mathbb{N}$ nin seçilmesine ve $n \rightarrow \infty$ iken $k \rightarrow \infty$ olduğuna dikkat ediyoruz).

NOT. $\sum \frac{1}{n}$ ye 'harmonik seri' denir.

Alıştırmalar

1- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^2+1}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2^{1/n}+14}$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n}$ serilerinin nğin irzksak olduklarını belirtiniz.

2- (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{(-3)^n} - \frac{3}{3^n} \right)$, (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2^n} + \frac{4}{5^n} \right)$, (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{n+1}}{5^n}$, (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{7^{n+1}}$,

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5} \right)^n$, (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^{n+1}}$ serilerinin toplamını bulunuz.

- 68 -

Aşağıdaki sonucun ispatı son teoremden hemen görülür.

SONUÇ. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_{n+1} > a_n$ olacak şekilde pozitif terimli bir (a_n) dizisi verilmiş olsun. O zaman $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ıraksaktır.

TEOREM 14. (a_n) ve (b_n) iki dizi olmak üzere $\forall n \geq k$ için $a_n = b_n$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ var olsun. O zaman $\sum a_n$ yakınsak $\Leftrightarrow \sum b_n$ yakınsak olur.

İspat. $\sum a_n$ ve $\sum b_n$ serilerinin kısmi toplamlar dizileri sırasıyla s_n ve t_n olsun. Eğer

$$\alpha = \sum_{i=1}^k a_i \quad \wedge \quad \beta = \sum_{i=1}^k b_i$$

ise, o zaman $\forall n \geq k$ için

$$s_n - \alpha = \sum_{i=k+1}^n a_i = \sum_{i=k+1}^n b_i = t_n - \beta$$

olur. Bundan (s_n) yakınsak $\Leftrightarrow (t_n)$ yakınsak olduğu görülür ve bu ispatı tamamlar. $\#$

Yukarıdaki teoremden aşağıdaki sonuç çıkarılır:

Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serisi terimlerin sonlu tanesinin eklenmesi veya çıkarılmasıyla $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinden elde edilirse, o zaman

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsak $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ yakınsak olur. Özel olarak

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsak $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k}$ yakınsak ($\forall k \in \mathbb{N}$) yazılabilir.

Yakınsaklık için Testler.

Teorem 15 (Karşılaştırma Testi). (a_n) ve (b_n) dizilerin negatif olmayan terimli diziler olduğunu ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n \leq b_n$ olduğunu kabul edelim. O zaman

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ yakınsak} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ yakınsak}$$



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Cenap DUYAR

Analiz III

Seriler – Zenon paradoksu,
Seriler için yakınsaklık tanımı,
Ağıştırmalar

Ders 5