



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



1

Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Dijital Ders Platformu

Has Olmayan İntegraller

Prof. Dr. Cenap DUYAR

Ders 4

Alıştırmalar

Verilen integrallerin yakınsaklığını inceleyiniz.

$$(1) \int_0^1 \frac{dx}{1-x} \quad (2) \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \quad (3) \int_0^1 \frac{\sinh x}{x^{3/2}} dx$$

$$(4) \int_1^3 \frac{x^2+1}{x^2-4} dx \quad (5) \int_0^\pi \frac{\sqrt{x}}{\sinh x} dx \quad (6) \int_0^1 \frac{x^n \ln x}{(1+x)^2} dx$$

Cevap: (1) ıraksak; (2) $n > -1$ için yakınsak; (3) yakınsak; (4) ıraksak; (5) ıraksak; (6) $n > -1$ için yakınsak.

Şimdi ikinci tür has olmayan integrallerin yakınsaklığı için bir genel test tartışalım.

Teorem 10 (Cauchy Testi). $[a, b]$ de f fonksiyonunun tek singüler noktası a olmak üzere $\int_a^b f(x) dx$ has olmayan integralinin yakınsak olması için $\Leftrightarrow \exists \delta > 0$ sayısı

- 46 -

$0 < \mu_1 < \mu_2 < \delta$ olduğunda

$$\left| \int_{a+\mu_1}^{a+\mu_2} f(x) dx \right| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ bulunmasıdır.

İspat. $\int_a^b f(x) dx$ has olmayan integrali yakınsak olsun. Bu $\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \int_{a+\mu}^b f(x) dx$ limitinin var ve sonlu olması demektir.

$F(\mu) = \int_{a+\mu}^b f(x) dx$ olsun. Böylece F , μ değişkeninin bir fonksiyonudur. Sonlu limitler için Cauchy kriterine göre

$\lim_{\mu \rightarrow 0} F(\mu)$ limitinin sonlu olması için $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$

sayısına karşılık $0 < \mu_1, \mu_2 < \delta$ olduğunda

$$|F(\mu_1) - F(\mu_2)| = \left| \int_{a+\mu_1}^{b-\mu_2} f(x) dx - \int_{a+\mu_2}^b f(x) dx \right| = \left| \int_{a+\mu_1}^{a+\mu_2} f(x) dx \right| < \varepsilon$$

olur. Bu ispatı tamamlar.

-47-

İkinci Tür Has Olmayan İntegrallerin Mutlak Yakınsaklığı.

TANIM. Eğer a noktası f 'nin bir tek singüler noktası olmak üzere $\int_a^b |f(x)| dx$ has olmayan integrali yakınsak ise, o zaman $\int_a^b f(x) dx$ has olmayan integralinin 'mutlak yakınsak' olduğu söylenir.

Teorem 11. Her mutlak yakınsak ikinci tür has olmayan integral (a noktası $[a, b]$ integrallene aralıkğının te singüler noktası) yakınsaktır. Yani $\int_a^b |f(x)| dx$ varsa $\int_a^b f(x) dx$ vardır.

İspat. $\int_a^b |f(x)| dx$ var olduğundan, Cauchy testine göre $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık $0 < \mu_1 < \mu_2 < \delta$ olduğunda

$$\left| \int_{a+\mu_1}^{a+\mu_2} |f(x)| dx \right| < \varepsilon$$

olacak şekilde $\exists \delta > 0$ vardır.

-48-

$$\left| \int_{a+\mu_1}^{a+\mu_2} f(x) dx \right| \leq \int_{a+\mu_1}^{a+\mu_2} |f(x)| dx$$

ve

$$\left| \int_{a+\mu_1}^{a+\mu_2} |f(x)| dx \right| = \int_{a+\mu_1}^{a+\mu_2} |f(x)| dx$$

olduğu için $0 < \mu_1 < \mu_2 < \delta$ olduğunda

$$\left| \int_{a+\mu_1}^{a+\mu_2} f(x) dx \right| < \varepsilon$$

yazılır. Böylece $\int_a^b f(x) dx$ yakınsaktır.

ÖRNEK. $\int_0^1 \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^p} dx$, ($p > 0$) has olmayan integralin $p < 1$ için mutlak yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $f(x) = \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^p}$, ($p > 0$) olsun. '0' tek singüler noktadır ve $[0, 1]$ de f nin işareti değişir. Aynı zamanda

$$|f(x)| = \frac{|\sin \frac{1}{x}|}{x^p} \leq \frac{1}{x^p}, \quad \forall x \in [0, 1]$$

ve $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ has olmayan integrali $p < 1$ için yakınsaktır. Böylece $p < 1$ için $\int_0^1 \left| \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^p} \right| dx$ yakınsaktır.

ÖRNEK (Gamma Fonksiyonu). $\int_0^{\infty} x^{m-1} e^{-x} dx$ integrali yakınsaktır $\Leftrightarrow m > 0$ dir. Gösteriniz.

Çözüm. $f(x) = x^{m-1} e^{-x}$ olsun. Eğer $m < 1$ ise, 0 noktası f nin bir singüler noktasıdır. Böylece hem 0 hemde ∞ da verilen has olmayan integralin yakınsaklığı araştırılmalıdır.

$$\int_0^{\infty} x^{m-1} e^{-x} dx = \int_0^1 x^{m-1} e^{-x} dx + \int_1^{\infty} x^{m-1} e^{-x} dx$$

yazılsın.

$\int_0^1 x^{m-1} e^{-x} dx$ integralinin yakınsaklığı ($m < 1$):

$g(x) = \frac{1}{x^{1-m}}$ olsun. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x} = 1 \in (0, \infty)$ olur

ve $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-m}}$ yakınsak $\Leftrightarrow m > 0$ olduğu için limit karşılaştırma testine göre $\int_0^1 x^{m-1} e^{-x} dx$ yakınsak $\Leftrightarrow m > 0$ yazabiliriz. Bu da ispatı tamamlar.

$\int_1^{\infty} x^{m-1} e^{-x} dx$ integralinin yakınsaklığı:

$g(x) = \frac{1}{x^2}$ olsun, böylece

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{m+1}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(m+1)!}{e^x} = 0$$

olur.

$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ yakınsak olduğundan $\forall m \in \mathbb{R}$ için $\int_1^{\infty} x^{m-1} e^{-x} dx$ yakınsaktır. Bundan dolayı $\int_1^{\infty} x^{m-1} e^{-x} dx$ yakınsak $\Leftrightarrow m > 0$ yazabiliriz.

Sonuç. $m > 0$ olmak üzere $\Gamma(m) = \int_0^{\infty} x^{m-1} e^{-x} dx$ biçiminde tanımlanan fonksiyona 'Gamma fonksiyonu' ^{denir.} değildir. Son örnek gereğince $\Gamma(0)$, $\Gamma(-1)$ gibi değerler yoktur.

Bu bölümde sen olarak Cauchy esas değeri kavramını inceleyelim.

TANIM. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun tüm $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli olduğunu kabul edelim. Eğer

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx$$

limiti varsa, bu limit değerine f nin $(-\infty, \infty)$ üzerindeki integralinin 'Cauchy esas değeri' denir. ve

$$\text{e. d. } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx$$

yazılır.

NOT. Eğer

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

varsa, o zaman

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \text{e. d. } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

esitliği gerçekleşir. Ama

$$\text{E.g. } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

değeri var olmasa bile

$$\text{e.d. } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

değeri var olabilir. Örneğin

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{x}{1+x^2} dx + \int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{x}{1+x^2} dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right) \Big|_{x=a}^{x=0} + \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right) \Big|_{x=0}^{x=b}$$

$$= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2} \ln(1+a^2) \right) + \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \ln(1+b^2) \right) = \infty - \infty$$

olduğundan $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$ integrali yoktur, ama

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{x}{1+x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right) \Big|_{x=-R}^{x=R}$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \ln(1+R^2) - \frac{1}{2} \ln(1+(-R)^2) \right] = 0$$

olduğundan e.d. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$ var ve 0 sayısına eşittir.

-59-

İkinci tür has olmayan integraler için Cauchy esas değerini tanımlayalım:

$f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ nin sadece x_0 noktasında singülariteye sahip olsun. O zaman

$$\text{e. d. } \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_a^{x_0 - \varepsilon} f(x) dx + \int_{x_0 + \varepsilon}^b f(x) dx \right\}$$

esitliğinde sağ yandaki limit varsa, bu değere $\int_a^b f(x) dx$ integralinin 'Cauchy esas değeri' denir.

ÖRNEK. e. d. $\int_{-2}^1 \frac{10+4x}{(5x+x^2)^3} dx = ?$

Çözüm. $f(x) = \frac{10+4x}{(5x+x^2)^3}$ fonksiyonunun $[-2, 1]$ aralığındaki tek singüler noktası 0 dir. O zaman

$$\text{e. d. } \int_{-2}^1 \frac{10+4x}{(5x+x^2)^3} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{-2+\varepsilon}^{0+\varepsilon} \frac{10+4x}{(5x+x^2)^3} dx + \int_{0+\varepsilon}^1 \frac{10+4x}{(5x+x^2)^3} dx \right\}$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \left[\frac{-1}{(5x+x^2)^2} \right]_{x=-2}^{x=-\varepsilon} + \left[\frac{-1}{(5x+x^2)^2} \right]_{x=\varepsilon}^{x=1} \right\}$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \left(\frac{-1}{(-5\varepsilon+\varepsilon^2)^2} - \frac{-1}{(-10+4)^2} \right) + \left(\frac{-1}{(5+1)^2} - \frac{-1}{(5\varepsilon+\varepsilon^2)^2} \right) \right\}$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{(5\varepsilon+\varepsilon^2)^2} - \frac{1}{(-5\varepsilon+\varepsilon^2)^2} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{25\varepsilon^2 - 10\varepsilon^3 + \varepsilon^4 - (25\varepsilon + 10\varepsilon^3 + \varepsilon^4)}{(5\varepsilon+\varepsilon^2)^2(-5\varepsilon+\varepsilon^2)^2}$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{-20\varepsilon^3}{\varepsilon^4(5+\varepsilon)^2\varepsilon^2(5-\varepsilon)^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{-20}{\varepsilon(5+\varepsilon)^2(5-\varepsilon)^2} = -\infty$$

olduğundan e.d. $\int_{-2}^1 \frac{10+4x}{(5x+x^2)^2} dx$ yoktur.



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



12

Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Cenap DUYAR

Analiz III

Has Olmayan İntegraller

Ders 4