



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



1

Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Dijital Ders Platformu

Has Olmayan İntegraller

Prof. Dr. Cenap DUYAR

Ders 3

İntegralleme Sınırları Sonlu Olan Sınırsız Fonksiyonların İntegrali.

TANIM. Bir f fonksiyonu bir $[a, b]$ aralığındaki olası sonlu tane nokta dışında her yerde tanımlı olsun.

(1) Sol uç noktada yakınsama: $0 < \lambda < b - a$ olmak üzere $\int_{a+\lambda}^b f(x) dx$ integralleri her λ için var olduğunda, f fonksiyonunun $[a, b]$ kapalı aralığında tek sınırsız olduğu nokta a noktası ise, $\int_a^b f(x) dx$ has olmayan integrali

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \int_{a+\lambda}^b f(x) dx$$

olarak tanımlanır. Eğer bu limit var ve sonlu ise $\int_a^b f(x) dx$ has olmayan integralinin 'yakınsak', aksi takdirde 'ıraksak' olduğu söylenir.

(2) Sağ uç noktada yəkinsəmə: f funksiyasının $[a, b]$ kəpəli ərahindəki tək sinirsiz olduğu nöqtə b və $0 < \mu < b - a$ olmaq üzərə hər μ için $\int_a^{b-\mu} f(x) dx$ inteqralləri var olsun. O zaman $\int_a^b f(x) dx$ has olmayan inteqralı

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\mu \rightarrow 0^-} \int_a^{b-\mu} f(x) dx$$

olarək tanımlənir. Eger bu limit varsa $\int_a^b f(x) dx$ inteqralının 'yəkinsək', aksi təkdirdə 'irəksək' olduğu söylenir.

(3) Her iki uç nöqtədə yəkinsəmə: Eger f funksiyası $[a, b]$ kəpəli ərahinin sadəcə a və b uç nöqlələrində sinirsiz isə, o zaman $a < c < b$ olmaq üzərə hər bir c için

$\int_a^b f(x) dx$ has olmayan inteqralı

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

olarək tanımlənir. Burada sağ yəndəki

integraller (1) və (2) biçimindəki həs olmayan integrallerdir və bu integraller yəkinsək isə $\int_a^b f(x)dx$ integralinin yəkinsək, əksi təqdirdə ırəksək olduğunu söyləyirik.

(4) İç nöktələrdə yəkinsəmə: Eger f funksiyonu $[a, b]$ aralığının sadəcə bir c iç nöktəsində ($a < c < b$) iki yəndən sinirsız isə $\int_a^b f(x)dx$ həs olmayan integrali

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

biçimində tərmlənir. Eger sağ yəndəki (1) və (2) biçimində həs olmayan integraller varsa, $\int_a^b f(x)dx$ integrali vardır.

ÖRNEK. (a) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ (b) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ (c) $\int_0^2 \frac{dx}{2x-x^2}$ həs olmayan integrallerinin yəkinsəkliğini araştırınız.

Çözüm. (a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ funksiyonu $[0, 1]$ aralığının sadəcə 0 nöktəsində sinirsızdır. 0 zaman

- 30 -

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \int_{\lambda}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} [-x^{-1}]_{\lambda}^1 = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} [-1 + \frac{1}{\lambda}] = \infty$$

olup, $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ integrali irəksəkdir.

(6) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ funksiyonu $[0,1]$ aralığının sadəcə 1 nöqtəsində sonsuz olduğundan

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} &= \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \int_0^{1-\mu} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \int_1^{\mu} \frac{-dt}{\sqrt{t}} = \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \int_{\mu}^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \frac{dt}{\sqrt{t}} \\ &= \lim_{\mu \rightarrow 0^+} 2\sqrt{t} \Big|_{t=\mu}^{t=1} = \lim_{\mu \rightarrow 0^+} 2(1 - \sqrt{\mu}) = 2 \end{aligned}$$

olur. 0 həddə $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ yaxınlaşk və dəyəri 2 dir.

$$(3) f(x) = \frac{1}{2x-x^2} = \frac{1}{x(2-x)} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2-x} \right) \frac{1}{2} \text{ funksiyonu}$$

$[0,2]$ kəpək aralığının 0 və 2 uç nöqtələrində sadəcə sonsuzdur.

0 zaman $1 \in (0,2)$ için $\int_0^2 \frac{dx}{2x-x^2}$ has olma-

yan integrali

$$\int_0^2 \frac{dx}{2x-x^2} = \int_0^1 \frac{dx}{2x-x^2} + \int_1^2 \frac{dx}{2x-x^2}$$

- 31 -

biçiminde sadece tek uç noktada sınırsızlığın olduğu iki has olmayan integralin toplamı biçiminde yazılır.

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{1}{2x-x^2} dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2-x} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{2-x} \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \left(\int_{\lambda}^1 \frac{dx}{x} + \int_{\lambda}^1 \frac{dx}{2-x} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \left(\ln|x| \Big|_{x=\lambda}^{x=1} + \ln|2-x| \Big|_{x=\lambda}^{x=1} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} (\ln 1 - \ln \lambda) + \frac{1}{2} \ln 2 \\
 &= -\frac{1}{2} \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \ln \lambda + \frac{1}{2} \ln 2 = -\infty
 \end{aligned}$$

olduğundan $\int_0^1 \frac{dx}{2x-x^2}$ ve dolayısıyla $\int_0^2 \frac{dx}{2x-x^2}$ integrali iraksaktır.

Teorem 7 (a noktasında sınırsız $f(x)$ fonksiyonunun $\int_a^b f(x) dx$ has olmayan integrali için karşılaştırmalı testi). Eğer f ve g fonksi-

biçiminde sadece tek uç noktada sınırsızlığın olduğu iki has olmayan integralin toplamı biçiminde yazılır.

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{1}{2x-x^2} dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2-x} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{2-x} \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \left(\int_{\lambda}^1 \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \ln|2-x| \right) \Big|_{x=0}^{x=1} \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \ln|x| \Big|_{x=\lambda}^{x=1} + \frac{1}{2} (\ln 1 - \ln 2) \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} (\ln 1 - \ln \lambda) + \frac{1}{2} \ln 2 \\
 &= -\frac{1}{2} \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \ln \lambda - \frac{1}{2} \ln 2 = -\infty
 \end{aligned}$$

olduğundan $\int_0^1 \frac{dx}{2x-x^2}$ ve dolayısıyla $\int_0^2 \frac{dx}{2x-x^2}$ integrali iraksaktır.

Teorem 7 (a noktasında sınırsız $f(x)$ fonksiyonunun $\int_a^b f(x) dx$ has olmayan integrali için karşılaştırmalı testi). Eğer f ve g fonksi-

yonları iki pozitif fonksiyon, a noktası f ve g nin $[a, b]$ deki tek singüler noktası ve her $x \in [a, b]$ için $f(x) \leq g(x)$ ise, o zaman

(a) $\int_a^b g(x) dx$ yakınsak ise $\int_a^b f(x) dx$ yakınsaktır,

(b) $\int_a^b f(x) dx$ ıraksak ise $\int_a^b g(x) dx$ ıraksaktır.

İspat: Hipoteze göre her $0 < \lambda < b-a$ için $[a+\lambda, b]$ aralığında f ve g fonksiyonları sınırlıdır. Ayrıca

$$\int_{a+\lambda}^b f(x) dx \leq \int_{a+\lambda}^b g(x) dx$$

yazılır.

(a) $\int_a^b g(x) dx$ yakınsak olsun. O zaman $\forall \epsilon \in (0, b-a)$ için

$$\int_{a+\lambda}^b g(x) dx \leq m$$

olacak şekilde $\exists m > 0$ vardır.

o zaman $\forall \lambda \in (0, b-a)$ için

$$\int_{a+\lambda}^b f(x) dx \leq m$$

dir. Buna göre $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \int_{a+\lambda}^b f(x) dx \leq m$ olup, bu $\int_a^b f(x) dx$ has olmayan integralinin yakınsak olması demektir.

(b) (a) şıkkının kolay bir sonucudur.

Limit Karşılaştırma Testi.

Teorem 8. Eğer f ve g $[a, b]$ de iki pozitif fonksiyon ve a noktası $[a, b]$ de f ve g nin tek singüler noktası, ayrıca $0 < l < \infty$ olmak üzere

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

ise, o zaman $\int_a^b f(x) dx$ ve $\int_a^b g(x) dx$ integralleri aynı karaktere sahiptir.

- 34 -

İspat. $l - \varepsilon > 0$ olacak şekilde $\forall \varepsilon > 0$ verilmiş.
O zaman $\forall x \in (a, c)$ için

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| < \varepsilon \text{ (veya } (l - \varepsilon)g(x) < f(x) < (l + \varepsilon)g(x))$$

olacak şekilde bir $c \in (a, b)$ vardır. Bu $\forall x \in (a, c)$ için

$$(l - \varepsilon)g(x) < f(x) \wedge f(x) < (l + \varepsilon)g(x)$$

olmasını gerektirir. Buna göre birinci eşitsizlik gereğince

$$\int_a^b f(x) dx \text{ yakınsak ise } \int_a^b g(x) dx \text{ yakınsak}$$

ve

$$\int_a^b g(x) dx \text{ ıraksak } \parallel \int_a^b f(x) dx \text{ ıraksak,}$$

ikinci eşitsizlik gereğince

$$\int_a^b g(x) dx \text{ yakınsak ise } \int_a^b f(x) dx \text{ yakınsak}$$

ve

$$\int_a^b f(x) dx \text{ ıraksak } \parallel \int_a^b g(x) dx \text{ ıraksak}$$

olur. Bu ispatı tamamlar.

-35-

Teorem 9. $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n}$ has olmayan m-
tegrali yəkinsəkdir $\Leftrightarrow n < 1$ dir.

İspat. Eger $n \leq 0$ ise $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n}$ bir has
integraldir, n nin tüm diğer deyə-
ləri için has olmayan integraldir,
çünkü a noktası $[a, b]$ de bir tek sığ-
güler nöqtədir.

$n \neq 1$ için

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n} &= \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \int_{a+\lambda}^b \frac{dx}{(x-a)^n} = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{1}{-n+1} [(b-a)^{-n+1} - \lambda^{-n+1}] \\ &= \begin{cases} \frac{1}{-n+1} (b-a)^{-n+1} & , n < 1 \text{ iŕe} \\ \infty & n > 1 \text{ iŕe} \end{cases} \end{aligned}$$

ve $n=1$ için

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \int_{a+\lambda}^b \frac{dx}{x-a} = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} [\ln(b-a) - \ln \lambda] = \infty$$

olur, bəyŕecə $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n}$ integrali $n < 1$ için yəkinsəkdir.

NOT. Bir benzer sonuç b noktasında $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n}$ integrali için geçerlidir.

ÖRNEK. (a) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$ (b) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^p} dx$ has olmayan integrallerinin yakınsaklığını test ediniz.

Gözüm. (a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^3}} = \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x+x^2)}} = \frac{1}{(1+x+x^2)^{1/2}} \cdot \frac{1}{(1-x)^{1/2}}$

olsun. $\frac{1}{(1+x+x^2)^{1/2}}$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında sınırlıdır, eğer M onun bir üst sınırı olmak üzere

$$\frac{1}{(1+x+x^2)^{1/2}} \cdot \frac{1}{(1-x)^{1/2}} \leq \frac{M}{(1-x)^{1/2}}, \quad \forall x \in [0,1]$$

yazılabilir. Öte yandan $\int_0^1 \frac{M dx}{(1-x)^{1/2}}$ has olmayan

integrali (1 singüler nokta) $n = \frac{1}{2} < 1$ olduğu için yakınsaktır. Bundan dolayı $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$ integrali yakınsaktır.

-38-

(b) $\frac{\sin x}{x^p} = \frac{1}{x^{p-1}} \left(\frac{\sin x}{x} \right)$ yazılabilir.

$(0, \pi/2]$ aralığında $\frac{\sin x}{x}$ fonksiyonu sınırlı ve $\frac{\sin x}{x} \leq 1$ dir, bundan dolayı

$$\frac{\sin x}{x^p} \leq \frac{1}{x^{p-1}}$$

yazılır. Aynı zamanda $p-1 < 1$ (veya $p < 2$)

ise $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{x^{p-1}}$ integrali yakınsaktır. O zaman

karsılaştırma testine göre $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^p} dx$

integrali $p < 2$ için yakınsak ve $p \geq 2$ için

ıraksaktır. ($p \geq 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x / x^p}{1/x^{p-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$ ve $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{x^{p-1}}$ ıraksaktır.)

NOT. Eğer $\lim_{x \rightarrow a^+} [(x-a)^n f(x)]$ limiti var ve bir

sonlu pozitif sayı ise, o zaman $[a, b]$ deki

tek singüler noktası a olan $f(x)$ pozitif

funksiyonunun $\int_a^b f(x) dx$ has olmayan im-

tegrali yakınsaktır $\Leftrightarrow n \geq 1$ dir.

- 38 -

ÖRNEK. (a) $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ (b) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{\ln x} dx$ integrallerinin yakınsaklığını araştırınız.

Çözüm. (a) $[0,1]$ de $\frac{\ln x}{\sqrt{x}} < 0$ olduğundan

$$f(x) = -\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \frac{\ln \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} \geq 0$$

alalım. Yine $g(x) = \frac{1}{x^{3/4}}$ olsun. $n = \frac{3}{4} < 1$ olduğundan $\int_0^1 \frac{dx}{x^{3/4}}$ yakınsaktır. Ayrıca

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/4} \ln \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\ln x}{x^{-1/4}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{4} x^{-5/4}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 4 \sqrt[4]{x} = 0 \end{aligned}$$

olup, limit karşılaştırma testine göre $\int_0^1 f(x) dx$ integrali yakınsak olur, buna göre $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ yakınsaktır.

(b) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\ln x}$ olsun. $[1,2]$ aralığında f nin tek singüler noktası 1 dir.

-39-

Şimdi $g(x) = 1/(x-1)$ alınsın. 0 zaman

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt{x}}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{3/2} - x^{1/2}}{\ln x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{3}{2}x^{1/2} - \frac{1}{2}x^{-1/2}}{(\frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{2}x^{3/2} - \frac{1}{2}x^{1/2} \right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 > 0\end{aligned}$$

ve $\int_1^2 g(x) dx = \int_1^2 \frac{dx}{x-1}$ ıraksak olduğundan,
limit karşılaştırma testine göre $\int_1^2 f(x) dx$
 $= \int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{\ln x} dx$ ıraksaktır.

ÖRNEK. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^m x}{x^n} dx$ yakınsak $\Leftrightarrow n < m + 1$
dir. Gösteriniz.

Çözüm. $f(x) = \frac{\sin^m x}{x^n} = \left(\frac{\sin x}{x} \right)^m \cdot \frac{1}{x^{n-m}}$ olsun.

$n - m < 0$ ise $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\left(\frac{\sin x}{x} \right)^m \cdot \frac{1}{x^{n-m}} \right] = 0$
ve

$n - m > 0$ ise $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$
olur. Böylece $n \leq m$ ise $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^m x}{x^n} dx$ bir
has integral iken, $n > m$ ise has olmayandır.

Sadece 0 bir singüler noktadır.

$n > m$ olduğunda $g(x) = \frac{1}{x^{n-m}}$ olmak üzere

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^m = 1 \in (0, \infty)$$

olur. Aynı zamanda $\int_0^{\pi/2} g(x) dx = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{x^{n-m}}$ has olmayan integralinin yakınsak olması için $\Leftrightarrow n-m < 1$ dir.

Yani $n < m+1 \Leftrightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{x^{n-m}}$ yakınsaktır. Limit karşılaştırma testine göre

$n < m+1 \Leftrightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^m x}{x^n} dx$ yakınsak yazabiliriz.

ÖRNEK (Beta Fonksiyonu). $\int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$ integrali vardır $\Leftrightarrow m > 0$ ve $n > 0$ dir. Gösteriniz.

İspat. $m \geq 1, n \geq 1$ için verilen integral bir has integraldir. $m < 1$ olduğunda 0 tek singü-

- 41 -

Her nokta için, $n < 1$ olduğunda 1 tek singüler noktadır.

$$\int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx = \int_0^{1/2} x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx + \int_{1/2}^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$$

yazalım. $m < 1$ olsun.

$$f(x) = x^{m-1} (1-x)^{n-1} = \frac{(1-x)^{n-1}}{x^{1-m}}$$

olsun. $g(x) = \frac{1}{x^{1-m}}$ olmak üzere

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{n-1} = 1$$

olur. Ayrıca $\int_0^{1/2} g(x) dx = \int_0^{1/2} \frac{dx}{x^{1-m}}$ yakınsak

$\Leftrightarrow 1-m < 1$ (veya $m > 0$) olduğundan

$\int_0^{1/2} x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$ yakınsak $\Leftrightarrow m > 0$ dir,
yazabiliriz.

Şimdi $n < 1$ olsun. O zaman

$$f(x) = x^{m-1} (1-x)^{n-1} = \frac{x^{m-1}}{(1-x)^{1-n}} \wedge g(x) = \frac{1}{(1-x)^{1-n}}$$

olmak üzere

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} x^{m-1} = 1 \in (0, \infty)$$

olur. Aynı zamanda $\int_{1/2}^1 g(x) dx = \int_{1/2}^1 \frac{dx}{(1-x)^{n-1}}$

yakınsak $\Leftrightarrow 1-n < 1$ (veya $n > 0$) dir. Böylece

$\int_{1/2}^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$ yakınsak $\Leftrightarrow n > 0$ dir.

Sonuç olarak

$$\int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx \text{ yakınsak} \Leftrightarrow m > 0, n > 0$$

yazılır.

ÖRNEK. $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx$ integralinin varlığını değerlendirip, değerini bulunuz.

Çözüm. $f(x) = \ln(\sin x)$ olsun. $[0, \pi/2]$ da $f \leq 0$ dir. Bundan dolayı f nin yerine $-f$ yi düşünelim. 0 noktası $[0, \pi/2]$ deki tek singüler noktadır.

- 43 -

$0 < m < 1$ olmak üzere $g(x) = \frac{1}{x^m}$ olsun.
0 zaman

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x^m \ln(\sin x)) = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{x^{-m}} \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-m x^{-m-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{m x^{-m-1} \sin x} \\ &= \frac{1}{m} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^m \cdot \cos x \cdot x}{\sin x} = \frac{1}{m} \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^m \cdot \cos x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} \\ &= \frac{1}{m} \cdot (0) \cdot (1) = 0 \end{aligned}$$

olur. Öte yandan $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{x^m}$ has oluzyan integrali
 $0 < m < 1$ için yakınsak, böylece $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx$ yakın-
saktır.

Şimdi $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx$ olsun.

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ olduğundan, $\log \sin 2x = \log 2 + \log \sin x$

$+ \log \cos x$
 $\ln(\sin 2x) = \ln 2 + \ln(\sin x) + \ln(\cos x)$
yazılır. Bu

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2x) dx = \int_0^{\pi/2} \ln 2 dx + \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx + \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x) dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \ln 2 + I + \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x) dx$$

almasını gerektirir. Soldaki integralde $x = t/2$ ve son integralde $x = \frac{\pi}{2} - y$ dönüşümü yapılırsa,

$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin t) dt = \frac{\pi}{2} \ln 2 + I + \int_0^{\pi/2} \ln(\sin y) (-dy)$$

$$= \frac{\pi}{2} \ln 2 + I + \int_0^{\pi/2} \ln(\sin y) dy = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2I$$

bulunur. Buna göre

$$\frac{1}{2} \left[\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin x) dx \right] = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2I$$

ve böylece

$$\frac{1}{2} \left[I + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin x) dx \right] = \frac{1}{2} \left[I + \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(y + \frac{\pi}{2})) dy \right] = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2I$$

yazılır. Bundan dolayı

$$\frac{1}{2} \left[I + \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x) dx \right] = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2I \Rightarrow \frac{1}{2} [I + I] = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2I$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2I \Rightarrow I = -\frac{\pi}{2} \ln 2$$

olur. Sonuç olarak

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x) dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2$$

elde edilir.



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Cenap DUYAR

Analiz III

Has Olmayan İntegraller

Ders 3