ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Has Olmayan İntegraller

Prof. Dr. Cenap DUYAR

Ders 2

Çözümlü Problemler

1) $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$, 2) $\int_1^\infty \frac{x^2dx}{\sqrt{x^5+1}}$, 3) $\int_1^\infty e^{-x^2}dx$, 4) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}dx$, 5) $\int_1^\infty x^n e^{-x}dx$ ve 6) $\int_2^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$ integrallerinin yakınsak olup olmadığını araştırınız.

Çözüm. 1) $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$ ve $g(x)=\frac{1}{x^2}$ olsun. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ yakınsak ve

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1\in(0,\infty)$$ olduğundan $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$ yakınsaktır.

2) $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^5+1}}$ ve $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ olsun. O zaman $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$ ıraksak ve

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\sqrt{x}}{\sqrt{x^5+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x}\,(1+1/x^5)}=1\in(0,\infty)$$

olduğundan $\int_1^\infty \frac{x^2dx}{\sqrt{x^5+1}}$ integrali ıraksaktır.

3) $e^{x^2}\geq x^2,\ \forall x\in(0,\infty) \Rightarrow e^{-x^2}\leq\frac{1}{x^2}$ ve $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ yakınsak olduğundan $\int_1^\infty e^{-x^2}dx$ yakınsaktır.

4) $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$ ve $g(x)=x^{-3/2}$ olsun. O zaman

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{3/2}\ln x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}x^{-1/2}}=2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$$

ve $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}}$ yakınsak olduğundan $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}dx$ yakınsaktır.

5) $f(x)=x^n e^{-x}$ ve $g(x)=x^{-2}$ olsun. O zaman

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}x^2x^ne^{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{n+2}}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(n+2)!}{e^x}=0$$

ve $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ yakınsak olduğundan $\int_1^\infty x^n e^{-x}dx$ yakınsaktır.

6) Her $x\in\mathbb{R}$ için $\sin^2x\le 1$ olduğundan $\int_1^\infty \frac{\sin^2x}{x^2}dx$ yakınsak olur.

ÖZEL ÖRNEKLER

1) $\int_1^\infty \frac{x.\arctan x}{(1+x^4)^{1/3}}dx$ yakınsak mıdır?

Çözüm. $f(x)=\frac{x.\arctan x}{(1+x^4)^{1/3}}$ ve $g(x)=\frac{1}{x^{1/3}}$ olmak üzere

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{4/3}.\arctan x}{(1+x^4)^{1/3}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^4}{1+x^4}\right)^{1/3}.\arctan x=(1)^{1/3}.\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

ve $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{1/3}}$ ıraksak olduğundan verilen seride ıraksaktır.

−18

2) $\int_{e^2}^{\infty}\frac{dx}{x\ln(\ln x)}$ integrali yakınsak mıdır?

Çözüm. $t=\ln x$ dönüşümü yapılırsa,

$$\int_{e^2}^{\infty}\frac{dx}{x\ln(\ln x)}=\int_2^{\infty}\frac{dt}{\ln t}=\int_2^{\infty}\frac{dx}{\ln x}$$

olur. Şimdi $f(x)=\frac{1}{\ln x}$ ve $g(x)=\frac{1}{x}$ olmak üzere

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(1/x)}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$$

olup, $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x}$ ıraksak olduğu için $\int_2^{\infty}\frac{dx}{\ln x}$ de ıraksak olur. Buna göre verilen integral ıraksaktır.

3) $\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sinh x}\right)\frac{1}{x}dx$ integrali yakınsak mıdır?

Çözüm. $f(x)=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sinh x}\right)\cdot\frac{1}{x}$ olsun.

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{(e^x-e^{-x})/2}\right)\frac{1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x^2(e^x-e^{-x})}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{2x}-1-2xe^x}{x^2(e^{2x}-1)}=\lim_{x\to0^+}\frac{2e^{2x}-2e^x-2xe^x}{2x(e^{2x}-1)+2x^2e^{2x}}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{4e^{2x}-2e^x-2e^x-2xe^x}{2(e^{2x}-1)+4xe^{2x}+4xe^{2x}+4x^2e^{2x}}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{8e^{2x}-4e^x-2e^x-2xe^x}{4e^{2x}+4e^{2x}+8xe^{2x}+4e^{2x}+8xe^{2x}+8xe^{2x}+8x^2e^{2x}}=\frac{1}{6}$$

olduğundan $f(x)$ fonksiyonu $x=0$ noktasının sağ civarında sınırlıdır. O halde verilen integral birinci tür has olmayan integraldir.

Eğer $g(x)=\frac{1}{x^2}$ alınırsa,

$$\frac{f(x)}{g(x)}=x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sinh x}\right)=1-\frac{x}{\sinh x}=1-\frac{2x}{e^x-e^{-x}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1-\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x-e^{-x}}=1-\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x+e^{-x}}=1-0=1$$

ve $\forall a>0$ için $\int_a^\infty \frac{dx}{x^2}$ yakınsak olduğundan $\int_a^\infty\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sinh x}\right)\cdot\frac{1}{x}\,dx$ yakınsak olur. $f(x)$ fonksiyonunun 0 civarında sınırlı olması yüzünden $\int_0^\infty\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sinh x}\right)\frac{1}{x}\,dx$ yakınsaktır.

4) $\int_3^\infty \frac{dx}{x^2+x-2}$ integralinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $f(x)=\frac{1}{x^2+x-2}$ ve $g(x)=\frac{1}{x^2}$ olmak üzere

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+x-2}=1$ dir. $\int_3^\infty\frac{dx}{x^2+x-2}$ integrali yakınsaktır.

Ayrıca

$$\frac{1}{x^2+x-2}=\frac{1}{3(x-1)}-\frac{1}{3(x+2)}$$

kısmi kesir ayrışımında

$$\int_3^\infty \frac{dx}{3(x-1)} \quad \text{ve} \quad \int_3^\infty \frac{dx}{3(x+2)}$$

integrallerinin ıraksak olmasından

$$\int_3^\infty \frac{dx}{x^2+x-2}=\int_3^\infty \frac{dx}{3(x-1)}+\int_3^\infty \frac{dx}{3(x+2)}$$

eşitliği doğru değildir.

Şimdi verilen has olmayan integrali hesaplayalım:

$$\int_3^\infty \frac{dx}{x^2+x-2}=\lim_{b\to\infty}\int_3^b \frac{dx}{x^2+x-2}=\lim_{b\to\infty}\left[\int_3^b \frac{dx}{3(x-1)}-\int_3^b \frac{dx}{3(x+2)}\right]$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{3}(\ln|x-1|-\ln|x+2|)\Big|_3^b\right]=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{3}\left[\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\right]_{x=3}^{x=b}$$

$$=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{3}\left(\ln\left|\frac{b-1}{b+2}\right|-\ln\frac{2}{5}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3}\ln\left|\frac{5(b-1)}{2(b+2)}\right|$$

$$=\frac{1}{3}\ln\frac{5}{2}.$$

Koşullu Yakınsaklık

Bir $\int_a^\infty f(x)dx$ has olmayan integrali yakınsak, ama mutlak yakınsak değilse (yani $\int_a^\infty |f(x)|dx$ ıraksaksa), o zaman $\int_a^\infty f(x)dx$ integralinin "koşullu yakınsak" olduğu söylenir.

ÖRNEK. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ integralinin koşullu yakınsak olduğunu gösterelim.

Çözüm. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ olduğundan $x=0$ bir sonsuz süreksizlik noktası değildir. Bundan dolayı

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx=\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx+\int_1^\infty\frac{\sin x}{x}dx$$

yazılışında $\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx$ integralinin bir has integral olduğunu bilerek, $\int_1^\infty\frac{\sin x}{x}dx$ integralinin yakınsaklığı araştırılmalıdır.

$u=1/x$ $dv=\sin x\,dx$ olmak üzere kısmi integrasyon metodu uygulanırsa $du=-\frac{1}{x^2}dx$, $v=-\cos x$ olup,

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{\cos x}{x}\Big|_1^b - \int_1^b \frac{\cos x}{x^2}\,dx\right]$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\cos 1 - \frac{\cos b}{b}\right] - \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

$$= \cos 1 - \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

bulunur. $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ yakınsak olduğundan $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ integrali de yakınsak olur. Böylece $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ integrali yakınsaktır.

Şimdi $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ integralinin mutlak yakınsak olmadığını gösterelim:

$$\int_0^{n\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx = \sum_{r=1}^{n} \int_{(r-1)\pi}^{r\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,dx \ge \sum_{r=1}^{n}\int_{(r-1)\pi}^{r\pi}\frac{|\sin x|}{r\pi}\,dx$$

olup, $x=(r-1)\pi+y$ değişken dönüşümü ile

$$\int_{(r-1)\pi}^{r\pi}\frac{|\sin x|}{r\pi}\,dx = \int_0^\pi \frac{|\sin[(r-1)\pi+y]|}{r\pi}\,dy = \frac{1}{\pi r}\int_0^\pi \sin y\,dy = \frac{1}{\pi r}\left(-\cos y\Big|_0^\pi\right)$$

$$= \frac{1}{\pi r}(-\cos\pi+\cos 0) = \frac{2}{\pi r}$$

ve bundan dolayı

$$\int_0^{n\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,dx=\sum_{i=r}^{n}\int_{(r-1)\pi}^{r\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,dx\ge\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{r\pi}$$

olur. Buna göre

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,dx\ge\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{r\pi}=\infty$$

olup, $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{n\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,dx=\infty$ yazılır.

Şimdi bir $t\in\mathbb{R}^+$ verilsin.

$$n\pi\le t<(n+1)\pi$$

olacak şekilde bir $n\in\mathbb{Z}^+$ vardır. Böylece

$$\int_0^{t}\frac{|\sin x|}{x}\,dx\ge\int_0^{n\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,dx$$

yazılır ve $n\to\infty$ iken $t\to\infty$ olacağından

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^{t}\frac{|\sin x|}{x}\,dx=\infty$$

bulunur. Buna göre $\int_0^{\infty}\frac{|\sin x|}{x}\,dx$ ıraksaktır.

NOT. Bu örnek $0<p\le 1$ olmak üzere $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x^p}\,dx$ koşullu yakınsak olduğunu gösterir.

Mutlak Yakınsaklık İçin Test:

Teorem 3. Bir φ fonksiyonu $[a,\infty)$ üzerinde sınırlı ve her $b \geq a$ için $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir olsun. Bu takdirde $\int_a^\infty f(x)dx$ birinci tür has olmayan mutlak yakınsak ise, o zaman $\int_a^\infty f(x)\varphi(x)dx$ integrali de mutlak yakınsaktır.

İspat. φ fonksiyonu $[a,\infty)$ üzerinde sınırlı olduğundan

$$|\varphi(x)| \leq k, \quad \forall x \in [a,\infty)$$

olacak şekilde bir $k>0$ sayısı vardır. Yine $|f|$ fonksiyonu $[a,\infty)$ üzerinde pozitif ve $\int_a^\infty |f(x)|dx$ yakınsak olduğu için

$$\int_a^b |f(x)|dx < m, \quad \forall b \geq a$$

olacak şekilde bir $m>0$ bulunabilir. ($F(b)=\int_a^b |f(x)|dx$ fonksiyonu artan ve yakınsak ($b\to\infty$ iken) olduğundan üstten sınırlıdır, dolayısıyla m bir üst sınırdır).

O zaman $\forall x \in [a,\infty)$ için

$$|f(x)\varphi(x)| = |f(x)|\cdot|\varphi(x)| \le k\,|f(x)|$$

ve bundan dolayı $\forall b \ge a$ için

$$\int_a^b |f(x)\varphi(x)|\,dx \le k\int_a^b |f(x)|\,dx < k\,m$$

olur. Böylece $\int_a^\infty |f(x)\varphi(x)|\,dx$ yakınsak, dolayısıyla $\int_a^\infty f(x)\varphi(x)\,dx$ mutlak yakınsaktır. ✱

Şimdi birinci tür has olmayan integraller iki yakınsaklık testini ispatsız sunalım:

Teorem 4 (Abel Testi). Eğer φ fonksiyonu $[a,\infty)$ üzerinde sınırlı ve monoton, aynı zamanda $\int_a^\infty f(x)dx$ birinci tür has olmayan integrali yakınsak ise, o zaman $\int_a^\infty f(x)\varphi(x)\,dx$ integrali de yakınsak olur.

Teorem 5 (Dirichlet Testi). Eğer φ fonksiyonu $[a,\infty)$ üzerinde sınırlı ve monoton, $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=0$ ve her $b\geq a$ için $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq M$ olacak şekilde bir $M>0$ varsa, o zaman $\int_a^\infty f(x)\varphi(x)dx$ yakınsaktır.

ÖRNEK. $p>0$ için $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p}dx$ has olmayan integralinin yakınsak olduğunu gösterelim:

$p>0$ olsun ve $f(x)=\sin x$, $\varphi(x)=\frac{1}{x^p}$ alınsın. O zaman $\varphi(x)$ monoton azalan ve $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=0$ dır. Yine her $b\geq 1$ için

$$\left|\int_1^b f(x)dx\right| = \left|\int_1^b \sin x\,dx\right| = |\cos 1-\cos b|$$
$$\leq |\cos 1|+|\cos b| \leq 1+1=2$$

olur. Böylece $\int_1^b \sin x\,dx$, $[1,\infty)$ üzerinde sınırlıdır. Bundan dolayı Dirichlet testine göre $\int_1^\infty \sin x\cdot\frac{1}{x^p}dx$ integrali yakınsaktır.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Cenap DUYAR

Analiz III

Has Olmayan İntegraller

Ders 2