ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Has Olmayan İntegraller

Prof. Dr. Cenap DUYAR

Ders 1

Has Olmayan İntegraller

Eğer

(1) integral sınırlarının en az bir sonsuz, yani $a=-\infty$ v $b=+\infty$;

(2) $f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığının en az bir noktasında sınırsız (böyle noktalara $f(x)$ in singüler noktaları denir) ise, o zaman $\int_a^b f(x)\,dx$ integraline bir 'has olmayan integral' denir.

Burada (1) ve (2) ye karşılık gelen integrallere sırasıyla 'birinci ve ikinci türden has olmayan integraller' denir. Hem (1) hemde (2) koşulunu gerçekleyen integrallere 'üçüncü türden has olmayan integral' denir.

ÖRNEK 1. $\int_0^\infty \sin x^2\,dx$ birinci türden,

2. $\int_0^4 \frac{dx}{x-3}\,dx$ ikinci türden,

3. $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$ üçüncü türden

has olmayan integrallerdir.

4. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ bir has integraldir, çünkü $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ dir.

Birinci Türden Has Olmayan İntegraller.

Eğer f fonksiyonu $[a,x]$ ve $[x,b]$ aralıklarında integrallenebiliyorsa, o zaman $\int_a^x f(t)dt$ ve $\int_x^b f(t)dt$ belirsiz integralleri (sırasıyla değişken üst ve alt sınırları ile) birer fonksiyondur.

TANIM. (1) f fonksiyonu $[a,\infty)$ üzerinde integrallenebilirse, o zaman

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{x\to\infty} \int_a^{x} f(t)\,dt$$

dir.

(2) Eğer f, $(-\infty, b]$ üzerinde integrallene-bilirse, o zaman

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{x\to -\infty} \int_x^{b} f(t)\,dt$$

dir.

(3) Eğer f, $(-\infty, \infty)$ üzerinde integrallenebi-lirse, o zaman $c \in (-\infty, \infty)$ olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{\infty} f(x)\,dx$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \int_x^{c} f(t)\,dt + \lim_{x\to\infty} \int_c^{x} f(t)\,dt$$

dir. Burada sağdaki iki limit toplamının

$$\lim_{x\to\infty} \left[\int_{-x}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{x} f(x)\,dx \right]$$

değerine zorunlu olarak eşit olmadığını gözlemlemek önemlidir.

ÖRNEK. $f(x) = xe^{x^2}$ olsun.

$$\lim_{x\to-\infty} \int_x^c te^{t^2}dt = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}e^{t^2}\Big|_{t=x}^{t=c}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2}\left(e^{c^2} - e^{x^2}\right) = -\infty$$

ve

$$\lim_{x\to\infty} \int_c^x te^{t^2}dt = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}e^{t^2}\Big|_{t=c}^{t=x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\left(e^{x^2} - e^{c^2}\right) = +\infty$$

olduğundan $\lim\limits_{x\to-\infty}\int_x^c te^{t^2}dt + \lim\limits_{x\to\infty}\int_c^x te^{t}dt$ toplamı tanımsızdır. Ama

$$\lim_{x\to\infty}\left[\int_{-x}^c te^{t^2}dt + \int_c^x te^{t^2}dt\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\left(e^{c^2} - e^{x^2}\right) + \frac{1}{2}\left(e^{x^2} - e^{c^2}\right)\right]\right] = 0$$

dır. O halde

$$\lim_{x\to-\infty}\int_{-x}^c te^{t^2}dt + \lim_{x\to\infty}\int_c^x te^{t^2}dt \neq \lim_{x\to\infty}\left(\int_{-x}^c te^{t^2}dt + \int_c^x te^{t^2}dt\right)$$

dir.

Teorem 1 (Cauchy Kriteri). $\int_a^\infty f(x)dx$ həs olmayan integrali yakınsaktır $\Leftrightarrow$ her $\varepsilon>0$ sayısına karşılık, her $A, B \geq M$ için

$$\left|\int_A^B f(x)dx\right| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $M \geq a$ vardır.

İspat. $\int_a^\infty f(x)dx$ integralinin L ye yakınsadığı kabul edilsin. Yakınsama tanımına göre $\forall \varepsilon>0$ için

$$\left|\int_a^A f(x)dx - L\right| < \varepsilon/2, \ \forall A \geq M$$

olacak şekilde $M \geq a$ seçilebilir. O zaman eğer $B \geq M$ ise

$$\left|\int_A^B f(x)dx\right| = \left|\int_a^B f(x)dx - \int_a^A f(x)dx\right| = \left|\int_a^B f(x)dx - L + L - \int_a^A f(x)dx\right|$$
$$\leq \left|\int_a^B f(x)dx - L\right| + \left|L - \int_a^A f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Tersine şimdi ifade edilen Cauchy kriterinin gerçekleştiğini kabul edilsin.

$n \geq a$ doğal sayıları için,

$$a_n = \int_a^n f(x)dx$$

olsun. $\forall \varepsilon > 0$ verilsin ve hipotez ifade edildiği gibi $M \geq a$ seçilsin. O zaman $\forall m, n \geq M$ için

$$|a_n - a_m| = \left|\int_m^n f(x)dx\right| < \varepsilon$$

olur ve buna göre (a_n) bir Cauchy dizisidir. $\mathbb{R}$ de her Cauchy dizisi yakınsak olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ olmak üzere bir tek $L \in \mathbb{R}$ vardır. Şimdi $\varepsilon > 0$ olsun ve bu kez $\forall n, A, B \geq M$ için

$$|a_n - L| < \varepsilon/2 \ \wedge \ \left|\int_A^B f(x)dx\right| < \varepsilon/2$$

olacak şekilde bir $M \geq a$ seçilsin. Eğer $A \geq M+1$ ise o zaman $\lfloor A \rfloor \geq M$ ($\lfloor A \rfloor$, A dan küçük veya A ya eşit en büyük tamsayı) olup,

$$\left|\int_a^A f(x)dx - L\right| = \left|\int_a^{\lfloor A \rfloor} f(x)dx - L + \int_{\lfloor A \rfloor}^A f(x)dx\right|.$$

$$\leq |a_{\lfloor A \rfloor} - L| + \left|\int_{\lfloor A \rfloor}^A f(x)dx\right| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

çıkar. Bu $\int_a^\infty f(x)dx$ has olmayan integralinin L ye yakınsadığını ispatlar.

TANIM. Eğer $\int_a^\infty |f(x)|dx$ has olmayan integrali yakınsak ise, o zaman $\int_a^\infty f(x)dx$ has olmayan integralinin 'mutlak yakınsak' olduğu söylenir.

Teorem 2 (Mutlak yakınsama, yakınsamayı gerektirir). Eğer $\int_a^\infty f(x)dx$ has olmayan integrali mutlak yakınsak ise, o zaman yakınsaktır.

İspat. Cauchy kriterini kullanalım. $\int_a^\infty |f(x)|dx$ integrali yakınsak olduğundan, $\forall A, B \geq M$ için

$$\left|\int_A^B |f(x)|dx\right| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $M \geq a$ vardır. Böylece $\forall A, B \geq M$ için

$$\left|\int_A^B f(x)dx\right| \leq \int_A^B |f(x)|dx < \varepsilon$$

elde edilir. Bu $\int_a^\infty f(x)dx$ integralinin Cauchy kriterini sağladığını ispatlar, bundan dolayı $\int_a^\infty f(x)dx$ integrali yakınsak olur.

Teorem 3. $b \geq a$ olsun. O zaman $\int_a^\infty f(x)dx$ yakınsaktır $\Leftrightarrow$ $\int_b^\infty f(x)dx$ yakınsaktır.

İspat. Caucy kriterinin kolay bir sonucudur.

Birinci Tür Has olmayan İntegrallerin Yakınsaklığı veya Iraksaklığı.

f(x) fonksiyonu her sonlu $a \le x \le b$ aralığında sınırlı ve integrallenebilir olsun. O zaman $b \in \mathbb{R}^+$ değişken olduğunda

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

tanımını yaparız.

Sağdaki limit varsa, soldaki integral yakınsak, aksi takdirde ıraksaktır.

Benzer şekilde $a \in \mathbb{R}^-$ bir değişken olduğunda

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

tanımını yaparız. ve sağdaki limit varsa, soldaki integral yakınsak, aksi takdirde ıraksaktır.

ÖRNEK. (1) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\Big|_{x=1}^{x=b}\right) = \lim_{b\to\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right) = 1,$

böylece $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ integrali 1 e yakınsar.

(2) $\int_{-\infty}^{u} \cos x\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^u \cos x\,dx = \lim_{a\to-\infty} (\sin u - \sin a)$ olup,

bu limit var olmadığından, $\int_{-\infty}^{u} \cos x\,dx$ ıraksaktır.

Benzer anlamda bir $x_0 \in \mathbb{R}$ için

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^{\infty} f(x)dx$$

tanımını yaparız ve sağdaki integrallerin yakınsak olup olmamasına $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ yakınsak veya ıraksaktır.

ÖRNEK. $p \neq 1$ için $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ integralini değerlendirelim.

$$\int_1^b \frac{dx}{x^p} = \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^b = \frac{b^{-p+1}-1}{-p+1} \Rightarrow \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{b^{-p+1}-1}{-p+1}\right] = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & p>1 \\ \infty, & p<1 \end{cases}$$

olur. Eğer $p=1$ ise

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty}\left(\ln x\Big|_1^b\right) = \lim_{b\to\infty} \ln b = \infty$$

Bu örnek şu sonucu verir:

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\begin{cases}\text{yakınsak}, & p>1\\ \text{ıraksak}, & p\leq 1\end{cases}.$$

Birinci Türden Has Olmayan İntegraller İçin Yakınsaklık Testleri.

Aşağıdaki testler bir integral sınırının ∞ olması durumları için veriliyor. Benzer testler bir integral sınırının $-\infty$ olması halinde de vardır ($x=-y$ değişken değişimi integral sınırını $-\infty$ yapar). Aksi belirtilmediği sürece, $f(x)$ fonksiyonunun her $a\leq x\leq b$ aralığında sürekli ve dolayısıyla integrallenebilir olduğunu varsayalım.

1- Karşılaştırma Testi (negatif olmayan integrandlara sahip fonksiyonlar için).

Teorem 1 (Karşılaştırma Testi).
Her $x \geq a$ için $g(x) \geq 0$ ve $\int_a^\infty g(x)\,dx$ yakınsak olsun. O zaman eğer her $x \geq a$ için $0 \leq f(x) \leq g(x)$ ise, $\int_a^\infty f(x)\,dx$ integrali de yakınsak olur.

İspat. Her $A \geq a$ için

$$F(A) = \int_a^A f(x)\,dx \ \wedge \ G(A) = \int_a^A g(x)\,dx$$

olsun. Hipotez $F(A) \leq G(A)$ olmasını gerektirir. ve bu fonksiyonların her ikisi de artandır ($f(x)$ ve $g(x)$ negatif olmayan fonksiyonlar olduğundan). Üstelik $\lim_{A\to\infty} G(A) = L$ olmak üzere bir L limiti vardır ($\int_a^\infty g(x)\,dx$ yakınsak olduğundan). Bu her $A \geq a$ için

$$F(A) \leq G(A) \leq L$$

olmasını sağlar.

$F(A)$ artan ve L ile üstten sınırlı olduğundan, $\lim_{A\to\infty} F(A)$ limiti var olmalıdır. Bu ispatı tamamlar.

ÖRNEK. $1/(e^x+1) \leq 1/e^x = e^{-x}$ ve

$$\lim_{A\to\infty} \int_a^A e^{-x}dx = \lim_{A\to\infty} [-e^{-x}]_a^A = \lim_{A\to\infty} [-e^{-A}+e^{-a}] = e^{-a}$$

olduğundan $\int_a^\infty e^{-x}dx$ yakınsak, karşılaştırma testine göre $\int_a^\infty \frac{dx}{e^x+1}$ integrali yakınsak olur.

NOT. Karşılaştırma testi bir has olmayan integralin ıraksaklığına karar vermek için kullanılabilir:

Her $x \geq a$ için $g(x) \geq 0$ ve $\int_a^\infty g(x)dx$ integrali ıraksak olsun. O zaman eğer her $x \geq a$ için $g(x) \leq f(x)$ ise $\int_a^\infty f(x)dx$ integrali de ıraksak olur.

ÖRNEK. Her $x \geq 2$ için $1/\ln x > 1/x$ ve $\int_2^\infty \frac{dx}{x}$ integrali ıraksak olduğundan $\int_2^\infty \frac{dx}{\ln x}$ integrali de ıraksaktır.

Teorem 2 (Limit Karşılaştırma Testi). Her $x \geq a$ için $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ ve her $b > a$ için $\int_a^b f(x)dx$ ile $\int_a^b g(x)dx$ integrallerinin var olduğu kabul edil-

sın. Ayrıca bir $l \geq 0$ için
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$
olsun.

(1) Eğer $l \neq 0$ ise, o zaman
$$\int_a^\infty f(x)dx \text{ yakınsak} \Leftrightarrow \int_a^\infty g(x)dx \text{ yakınsak}$$
olur.

(2) Eğer $l = 0$ ise, o zaman
$$\int_a^\infty g(x)dx \text{ yakınsak} \Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx \text{ yakınsak}$$
olur.

(3) Eğer $l = \infty$ ise, o zaman
$$\int_a^\infty g(x)dx \text{ ıraksak} \Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx \text{ ıraksak}$$
olur.

İspat. Bir $l \geq 0$ için $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ olsun.

(1) $l \neq 0$ kabul edelim. O zaman $l > 0$ ve $l - \varepsilon > 0$ olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ için
$$l - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < l + \varepsilon, \ \forall x \geq x_0$$
olacak şekilde bir $x_0 \geq a$ vardır. Bundan dolayı

$$(\ell-\varepsilon)g(x) < f(x) < (\ell+\varepsilon)g(x), \ \forall x \geq x_0$$

olur. Sonuç olarak karşılaştırma testine göre $\int_{x_0}^{\infty} f(x)dx$ yakınsak $\Leftrightarrow$ $\int_{x_0}^{\infty} g(x)dx$ yakınsak olur. $\int_a^{x_0} f(x)\,dx$ ve $\int_a^{x_0} g(x)dx$ var olduğu için, istenen elde edilir.

(2) $\ell = 0$ olsun. O zaman her $\varepsilon > 0$ için $x \geq x_0$ olduğunda $f(x)/g(x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $x_0 \geq a$ vardır. Böylece her $x \geq x_0$ için

$$f(x) < \varepsilon g(x)$$

ve bundan dolayı $\int_{x_0}^{\infty} g(x)dx$ integralinin yakınsaklığı $\int_{x_0}^{\infty} f(x)dx$ integralinin yakınsaklığını gerektirir. Bundan istenen sonuç çıkarılır.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$ olsun. O zaman $\forall M > 0$ için,

$$M \leq \frac{f(x)}{g(x)}, \ \forall x \geq x_0$$

olacak şekilde bir $x_0 \geq a$ vardır. Bundan dolayı

$$0 \leq Mg(x) \leq f(x)$$

olur.

Sonuç olarak $\int_{x_0}^{\infty} g(x)dx$ integralinin ıraksaklığı $\int_{x_0}^{\infty} f(x)dx$ integralinin ıraksaklığını gerektirir.

NOT. Özel olarak $g(x)=1/x^p$ alınırsa, aşağıdaki sonuç elde edilir:

$\lim\limits_{x\to\infty} x^p f(x) = A$ olsun. O zaman $(a>0)$

(i) Eğer $p>1$ ve A sonlu ise $\int_a^{\infty} f(x)dx$ yakınsaktır.

(ii) Eğer $p\leq 1$ ve $A\neq 0$ (A sonsuz olabilir) $\int_a^{\infty} f(x)dx$ ıraksaktır.

ÖRNEK. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \cdot \dfrac{x^2}{4x^4+25} = \dfrac{1}{4}$ olduğundan $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2dx}{4x^4+25}$ yakınsak ve $\lim\limits_{x\to\infty} x \cdot \dfrac{x}{\sqrt{x^4+x^2+1}} = 1$ olduğundan $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$ ıraksaktır.

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Cenap DUYAR

Analiz III

Has Olmayan İntegraller

Ders 1