ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Grupların İç Direkt Toplamları

Prof. Dr. Şenol EREN

Ders 20

3.7 Grupların İç Direkt Toplamları

Tanım 3.7.1 G değişmeli bir grup ve $H_1, \dots, H_n$; G nin alt grupları olsunlar.

$$H_1 + \dots + H_n = \{ h_1 + \dots + h_n \mid i = 1, 2, \dots, n \text{ için } h_i \in H_i \}$$

kümesine $H_1, \dots, H_n$ altgruplarının toplam kümesi adı verilir.

Teorem 3.7.2 G değişmeli bir grup ve $H_1, H_2, \dots, H_n$ G nin altgrupları olsun. $H = H_1 + H_2 + \dots + H_n$ toplam kümesi G nin bir altgrubudur.

İspat: $0 = 0_{H_1} + \dots + 0_{H_n}$ ve $0 \in H$ olup $H \neq \emptyset$ dir.
$h \in H$ ise $h = h_1 + h_2 + \dots + h_n$ olacak şekilde $h_1 \in H_1, \dots, h_n \in H_n$ vardır. Dolayısıyla $h \in G$ olup, $H \subseteq G$ dir.
$x, y \in H \Rightarrow x = h_1 + \dots + h_n$ ve $y = h_1' + \dots + h_n'$ olacak şekilde $h_i, h_i' \in H_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ vardır.

Buradan $x-y=(h_1+\cdots+h_n)-(h_1'+\cdots+h_n')$
$=h_1+\cdots+h_n-h_1'-h_2'\cdots-h_n'$
$=(h_1-h_1')+\cdots+(h_n-h_n')\in H$ bulunur.
Dolayısıyle $H\leq G$ dir.

Teorem 3.7.3 G değişmeli bir grup $H_1,\dots,H_n\leq G$ olsun. $G=H_1+\cdots+H_n$ olması için gerek ve yeter şart $G=\langle\bigcup_{i=1}^{n}H_i\rangle$ olmasıdır.

İspat: ($\Rightarrow$) Hipotezden $x\in G$ ise $x=h_1+\cdots+h_n$ olacak şekilde $x_i\in H_i$ $(i=1,2,\dots,n)$ vardır. $H_i\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}H_i$ $(i=1,2,\dots,n)$ olduğundan $x_1,\dots,x_n\in\bigcup_{i=1}^{n}H_i$ olup $x\in\langle\bigcup_{i=1}^{n}H_i\rangle$
$\Rightarrow G\subseteq\langle\bigcup_{i=1}^{n}H_i\rangle$ bulunur.

$y=y_1+\cdots+y_k\in\langle\bigcup_{i=1}^{n}H_i\rangle$ olsun. $\bigcup_{i=1}^{n}H_i\subseteq G$ olduğundan

$j=1,\dots,k$ için $y_j \in G$, $-y_j \in G$ dir. Dolayısıyla
$y=y_1+\dots+y_k \in G$ olup $\langle \bigcup_{i=1}^{n} H_i \rangle \subseteq G$ bulunur. $G=\langle \bigcup_{i=1}^{n} H_i \rangle$ dır.

$G=\langle \bigcup_{i=1}^{n} H_i \rangle$ olsun. $h \in H_1+\dots+H_n$ alalım. $h=h_1+h_2+\dots+h_n$
olacak şekilde $h_1 \in H_1,\dots,h_n \in H_n$ vardır. $H_1,\dots,H_n \subseteq G$
olduğundan $h_1,\dots,h_n \in G$, G grup olduğundan
$h=h_1+\dots+h_n \in G$ olur. O halde $H_1+\dots+H_n \subseteq G$ dir.
$g \in G$ olsun. Hipotezden $j=1,\dots,m$ için $g_j \in \bigcup H_i$ veya
$-g_j \in \bigcup H_i$ olmak üzere $g=g_1+\dots+g_m$ şeklinde yazılır.
$i=1,2,\dots,n$ için $H_i \leq G$ ve G değişmeli olduğundan
$g=g_1+\dots+g_m \in H_1+\dots+H_n$ bulunur. $G \subseteq H_1+\dots+H_n$
ve sonuç olarak $G=H_1+\dots+H_n$ bulunur.

Örnek 3.7.4 $\mathbb{Z}_{15}$ grubunun $H_1=\langle\bar{3}\rangle$, $H_2=\langle\bar{5}\rangle$, $H_3=\langle\bar{6}\rangle$ altgrupları için H_1+H_2, H_2+H_3, H_1+H_3 toplam gruplarını bulalım.

$$H_1+H_2=\{h_1+h_2 \mid h_1\in H_1, h_2\in H_2\}=\{m\bar{3}+n\bar{5} \mid m,n\in\mathbb{Z}\}$$
$$=\{\overline{m.3+n5} \mid m,n\in\mathbb{Z}\}=\{k.\bar{1} \mid k\in\mathbb{Z}\}=\mathbb{Z}_{15}$$
$$H_2+H_3=\{h_2+h_3 \mid h_2\in H_2, h_3\in H\}=\{m\bar{5}+n\bar{6} \mid m,n\in\mathbb{Z}\}$$
$$=\{\overline{m.5+n.6} \mid m,n\in\mathbb{Z}\}=\{k.\bar{1} \mid k\in\mathbb{Z}\}=\mathbb{Z}_{15}$$
$$H_1+H_3=\{h_1+h_3 \mid h_1\in H_1, h_3\in H_3\}=\{m\bar{3}+n\bar{6} \mid m,n\in\mathbb{Z}\}$$
$$=\{\overline{m.3+n.6} \mid m,n\in\mathbb{Z}\}=\{\overline{3(m+n.2)} \mid m,n\in\mathbb{Z}\}$$
$$=\{k.\bar{3} \mid k\in\mathbb{Z}\}=H_1 \quad \text{olup } H_1\neq\mathbb{Z}_{15} \text{ dir.}$$

Tanım 3.7.5 G değişmeli bir grup; $H_i \leq G$ $(i=1,2,\dots n)$ olsun. Eğer $x \in H_1+H_2+\dots+H_n$ için x in yazılışı tek türlü ise o zaman $H_1+H_2+\dots+H_n$ toplamına $H_1,\dots,H_n$ altgruplarının iç direkt toplamı denir ve $H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_n$ ile gösterilir.

Teorem 3.7.6 G değişmeli bir grup ve G nin $H_1, H_2, \dots, H_n$ sonlu altgrupları olsun. Bu durumda $|H_1 \oplus H_2 \dots \oplus H_n| = |H_1| . |H_2| \dots |H_n|$ dir.

İspat: $x = h_1+h_2+\dots+h_n \in H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_n$ olsun. $i=1,2,\dots n$ için x in yazılışı tek türlü olduğundan her hangi bir h_i nin değiştirilmesiyle farklı elemanlar elde edilir. O halde $x \in H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_n$ için farklı seçim sayısı $|H_1||H_2|\dots|H_n|$ dir.

Teorem 3.7.7: G değişmeli bir grup ve $H_1, H_2, \ldots, H_n$ G nin altgrupları olsun. $H_1+H_2 \ldots +H_n$ toplamının direkt toplam olması için gerek ve yeter şart $h_1+h_2+\ldots+h_n=0$ iken $h_1=h_2=\ldots=h_n=0$ olmasıdır.

İspat: ($\Rightarrow$) $H_1+H_2+\ldots+H_n$ toplamı direkt toplam olsun. $h_1+h_2+\ldots+h_n=0$ kabul edelim G nin birim elemanı $0=0+0+\ldots+0$ şeklinde yazılabilir. $h_1+h_2+\ldots+h_n=0+0+\ldots+0$ olup direkt toplamda yazılış tektürlü olduğundan $h_1=h_2=\ldots=h_n=0$ bulunur.

($\Leftarrow$) $h_1+h_2+\ldots+h_n=0$ iken $h_1=h_2=\ldots=h_n=0$ olsun. $x\in H_1+H_2+\ldots+H_n$ iken $x=h_1+\ldots+h_n=h_1'+h_2'+\ldots+h_n'$ olsun. Bu durumda $h_1+h_2+\ldots+h_n=h_1'+h_2'+\ldots+h_n'$ Buradan $h_1+h_2+\ldots+h_n-(h_1'+h_2'+\ldots+h_n')=0$ G değişmeli olduğundan $(h_1-h')+(h_2-h_2')+\ldots+(h_n-h_n')=0$ Hipotezden

$h_1 - h_1' = 0 \ldots\ldots h_n - h_n' = 0 \Rightarrow h_1 = h_1', \ldots, h_n = h_n'$ bulunur.
Böylece $H_1 + \cdots + H_n$ nin her x elemanının yazılışı tek türlü olup verilen direkt toplamdır.

Örnek 3.7.8 $G = \mathbb{Z}_{12}$ grubunun $H_1 = \langle \bar{3} \rangle = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$ $H_2 = \langle \bar{2} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}\}$ alt grupları için yazılış tektürlü değildir. Gerçekten $\bar{0} + \bar{6} = \bar{6}$ ve $\bar{6} + \bar{0} = \bar{6}$ dir.

Teorem 3.7.9 G değişmeli bir grup ve $H_1, H_2 \leq G$ olsun. $G = H_1 \oplus H_2$ olması için gerek ve yeter şart

i) $G = H_1 + H_2$

ii) $H_1 \cap H_2 = \{0\}$ olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ $G = H_1 \oplus H_2$ olsun. Buradan $G = H_1 + H_2$ dir. Şimdi $H_1 \cap H_2 = \{0\}$ olduğunu gösterelim. $x \in H_1 \cap H_2$ olsun. $x \in H_1 \wedge x \in H_2$ dir. $H_2 \leq G$ olduğundan $-x \in H_2$ dir. $x = h_1$ ve $-x = h_2$ olacak şekilde $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$ vardır. $h_1 + h_2 = x + (-x) = 0$ olup Teorem 3.7.7 den $h_1 = h_2 = 0$ olup $H_1 \cap H_2 = \{0\}$ elde edilir.

($\Leftarrow$) iveii sağlansın. Ayrıca $h_1 \in H_1 \wedge h_2 \in H_2$ için $h_1+h_2=0$ olsun. $h_1=-h_2$ olup, $h_1, -h_2 \in H_1 \cap H_2$ dir Hipotezden $H_1 \cap H_2 = \{0\}$ olduğundan $h_1=-h_2=0$ bulunur. Buradan $h_2=0$ dır. Bu durumda $h_1+h_2=0$ iken $h_1=h_2=0$ olduğundan Teorem 3.7.7 den dolayı $G=H_1 \oplus H_2$ dir.

Örnek 3.7.10 $G=\mathbb{Z}_{12}$ grubunun $H_1=\langle \bar{3} \rangle = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$ ve $H_2=\langle \bar{4} \rangle = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$ altgrupları için

$G=H_1+H_2$ ve $H_2 \cap H_3 = \{\bar{0}\}$ olduğundan $G=H_1 \oplus H_2$ dir.

Sonuç 3.7.11 G değişmeli bir grup $H_1, H_2, \ldots, H_n \leq G$ olsun. Bu durumda $G = H_1 \oplus H_2 \ldots \oplus H_n$ olması için gerek ve yeter şart i) $G = H_1 + H_2 \ldots + H_n$
ii) $\forall\, j = 1, 2, \ldots, n$ için $H_j \cap (H_1 + H_2 + \ldots + H_{j-1} + H_{j+1} + \ldots + H_n) = \{0\}$ olmasıdır.

İspat: Teorem 3.7.7 kullanılarak ve $n \geq 2$ üzerinde tümevarım uygulanarak ispat yapılır.

Teorem 3.7.12 G degişmeli bir grup ve $H_1, H_2 \leq G$ olsun $G = H_1 \oplus H_2$ ise

i) $G/H_1 \cong H_2$ ii) $G/H_2 \cong H_1$ dir

İspat: i) İkinci izomorfizma teoremini kullanırsak

$$G/H_1 = H_1+H_2/H_1 \cong H_2/H_1 \cap H_2 = H_2/\{0\} = H_2$$

ii) Benzer şekilde yapılır.

Örnek 3.7.13 $\mathbb{Z}_{12}$ grubunun $\langle \bar{3} \rangle$ ve $\langle \bar{4} \rangle$ altgrupları için $\mathbb{Z}_{12} = \langle \bar{3} \rangle \oplus \langle \bar{4} \rangle$ olduğundan

$$\mathbb{Z}_{12}/\langle \bar{3} \rangle \cong \langle \bar{4} \rangle \text{ ve } \mathbb{Z}_{12}/\langle \bar{4} \rangle \cong \langle \bar{3} \rangle \text{ tür.}$$

TEŞEKKÜRLER…