ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Grup Homomorfizmaları

Prof. Dr. Şenol EREN

Ders 19

Tanım 3.6.21 Bir G grubunun kendi üzerine bir izomorfizmasına bir otomorfizma denir. G nin bütün otomorfizmalar kümesi O(G) ile gösterilir.

Teorem 3.6.22 O(G) bileşke işlemi altında bir gruptur.

Teorem 3.6.23 G bir grup ve $a \in G$ olsun. $\forall x \in G$ için $\varphi_a(x) = axa^{-1}$ ile tanımlı $\varphi_a : G \longrightarrow G$ bir otomorfizmadır. φ_a ya G nin iç otomorfizması denir.

İspat: $\forall x, y \in G$ için $\varphi_a(x \cdot y) = a(xy)a^{-1} = (axa^{-1})(aya^{-1})$

$$= \varphi_a(x)\varphi_a(y)$$

$\varphi_a(x) = \varphi_a(y) \Longrightarrow axa^{-1} = aya^{-1} \Longrightarrow x = y$.

$\forall y \in G$ için $\varphi_a(x) = axa^{-1} = y$ olacak şekilde $\exists x \in G$ bulunabilir. $\varphi_a \in O(G)$ dir.

Teorem 3.6.24 Bir G grubunun bütün iç otomorfizmaları, $O(G)$ grubunun bir alt grubudur.

İspat: G nin iç otomorfizmalarının kümesini $I(G)$ ile gösterelim $\forall a \in G$ için $\varphi_a \in I(G)$ olduğundan $\emptyset \neq I(G) \subset O(G)$ dir.

$a, b \in G$ için $\forall \varphi_a, \varphi_b \in I(G)$ olmak üzere $\varphi_a \varphi_b \in I(G)$ ve $\varphi_a^{-1} \in I(G)$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$\forall x \in G$ için $(\varphi_a \circ \varphi_b)(x) = \varphi_a(\varphi_b(x)) = a(bxb^{-1})a^{-1}$

$$= (ab)x(ab)^{-1} = \varphi_{ab}(x)$$

$\varphi_a \circ \varphi_b = \varphi_{ab} \in I(G)$

$\varphi_a \circ \varphi_{a^{-1}} = \varphi_{aa^{-1}} = \varphi_e$ ve $\varphi_{a^{-1}} \circ \varphi_a = \varphi_{a^{-1}a} = \varphi_e$. Ayrıca $\forall x \in G$ için $\varphi_e(x) = x$ olduğundan φ_e $O(G)$ nin birim elemanıdır. $\varphi_{a^{-1}} = \varphi_a^{-1}$ olup istenen bulunur.

Teorem 3.6.25 $\forall a \in G$ için $\psi(a) = \varphi_a$ ile tanımlı $\psi : G \longrightarrow I(G)$ fonksiyonu bir homomorfizma ve $\text{Çek}\,\psi = M$ (G nin merkezi) olup $G/_M \cong I(G)$ dir.

İspat: iç otomorfizma tanımından ψ örtendir. Ayrıca $\forall a, b \in G$ için $\varphi_a \circ \varphi_b = \varphi_{ab}$ olduğundan $\psi(ab) = \varphi_{ab} = \varphi_a \circ \varphi_b = \psi(a) \circ \psi(b)$ olup ψ homomorfizmadır.

$\text{Çek}\,\psi$ ye bakalım.

$$
\begin{aligned}
a \in \text{Çek}\,\psi \iff \psi(a) = \varphi_a = \varphi_e &\iff \forall x \in G,\ \varphi_a(x) = \varphi_e(x) \\
&\iff \forall x \in G,\ axa^{-1} = exe^{-1} = x \\
&\iff \forall x \in G,\ ax = xa \\
&\iff a \in M
\end{aligned}
$$

$\text{Çek}\,\psi = M$ bulunur. Homomorfizma teoreminden $G/_M \cong I(G)$ bulunur.

Tanım 3.6.26 G bir grup ve $a, b \in G$ olsun. $b = xax^{-1}$ olacak şekilde bir $x \in G$ varsa b'ye a'nın (x ile) bir eşleniği denir ve $a \approx b$ ile gösterilir.

Teorem 3.6.27 "$\approx$" eşlenik olma bağıntısı G'de bir denklik bağıntısıdır.

Tanım 3.6.28 G de $\approx$ denklik bağıntısının belirttiği denklik sınıflarına eşlenik sınıfları denir. $a \in G$ nin belirttiği eşlenik sınıfı $C(a) = \{x \in G \mid a \approx x\}$ ile gösterilir.

Not: G sonlu bir grup ise mertebesi, eşlenik sınıflarındaki elemanların sayıları toplamıdır. $C(a)$ eşlenik sınıfının eleman sayısı c_a ise $G = C(a_1) \cup \dots \cup C(a_k)$ eşlenik sınıflara ayrılışı ise $o(G) = c_{a_1} + \dots + c_{a_k}$ olur.

Tanım 3.6.29 $H, K \leq G$ ve $a \in G$ olsun.

i) $aHa^{-1} = \{aha^{-1} \mid h \in H\}$ kümesine H alt grubunun aile eşleniği denir.

ii) $N_K(H) = \{k \in K \mid kHk^{-1} = H\}$ kümesine, H alt grubunun K içindeki normalleştiricisi denir.

Not: $\forall a \in G$ için $aHa^{-1} = H \Leftrightarrow H \triangleleft G$ olduğundan normal alt grubun kendisinden başka eşleniği yoktur. $K = G$ ise $N_G(H)$ yerine $N(H)$ yazılır. Ayrıca aHa^{-1}, $N_K(H) \leq G$ ve $N_K(H) \leq K$ dır.

TEŞEKKÜRLER…