UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Fonksiyonlar

Dr. Öğr. Üyesi Abdullah DERTLİ

Ders 8

Tanım: A kümesi ve $C \subseteq A$ kümesi verilmiş olsun. $\forall c \in C$ için $i(c) = c$ ile tanımlanan $i : C \longrightarrow A$ fonksiyonuna <u>içerme</u> fonksiyonu denir.

Teorem: $f : A \longrightarrow B$ fonksiyon, $\{A_i : i \in I\} \subseteq P(A)$, $\{B_j : j \in J\} \subseteq P(B)$ olsun.

i) $f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$

ii) $f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i)$

iii) $f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j)$

iv) $f^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(B_j)$

Not: i) $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$, $h : C \longrightarrow D$ olmak üzere

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

ii) $f \circ g \neq g \circ f$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x+5$ $\qquad$ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x+7$

$(f \circ g)(x) = 6x+19$ $\qquad$ $(g \circ f)(x) = 6x+22$

Tanım: $f : A \to B$ fonksiyon olsun. $f \circ g = I_B$, $g \circ f = I_A$ olacak şekilde $g : B \to A$ fonksiyonu varsa g ye f nin tersi denir. Benzer şekilde f de g nin tersidir. f fonksiyonunun tersi f^{-1} ile gösterilir.

$f : A \to B$ $\qquad$ $f^{-1} : B \to A$

$f \circ f^{-1} = I_B$ $\qquad$ $f^{-1} \circ f = I_A$

Teorem: $f: A \rightarrow B$ olsun. f fonksiyonunun tersi varsa tektir.

İspat: f fonksiyonunun tersi $g: B \rightarrow A$, $g': B \rightarrow A$ olsun. $\forall b \in B$ için $g(b) = g'(b)$ mi?

$$
\begin{aligned}
g'(b) &= g'((f \circ g)(b)) \\
&= (g' \circ f)(g(b)) \\
&= (I_A \circ g)(b) \\
&= g(b)
\end{aligned}
$$

NOT: i) $(f^{-1})^{-1} = f$

ii) $f: A \rightarrow B$, $D \subseteq B$ olmak üzere

$$f^{-1}(D) = \{x \in A : f(x) \in D\}$$

ile tanımlanmıştır. f fonksiyonunun tersi varsa $f^{-1}(D)$, D nin f^{-1} ters fonksiyonu altındaki görüntüsüne eşittir.

Teorem: $f : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. f nin tersinin olması için gerek ve yeter koşul f nin 1-1 ve örten olmasıdır.

İspat: f nin tersi var olsun. f 1-1, örten mi?

- $\forall x_1, x_2 \in X$ için $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2))$

$$\Longrightarrow (f^{-1} \circ f)(x_1) = (f^{-1} \circ f)(x_2)$$

$$\Longrightarrow I_X(x_1) = I_X(x_2)$$

$$\Longrightarrow x_1 = x_2$$

$\therefore f$, 1-1 dir.

- $\forall y \in Y$ için $\exists x \in X \ni f(x) = y$ olmalı.

$f^{-1} : Y \longrightarrow X$

$\Rightarrow f^{-1}(y) \in X \Rightarrow \exists x \in X \ni x = f^{-1}(y)$

$$\Rightarrow f(x) = f(f^{-1}(y)) = I_Y(y) = y$$

$\therefore$ f örtendir.

f, 1-1 ve örten olsun. f nin tersi var mı?

$$f : X \longrightarrow Y \qquad\qquad g : Y \longrightarrow X$$
$$x \longmapsto f(x) = y \qquad\qquad y \longmapsto g(y) = x$$

fonksiyonları tanımlansın. f örten olduğundan $\forall y \in Y$ için $\exists x \in X \ni f(x) = y$. f 1-1 olduğundan x teklikle belirlidir. Dolayısıyla $g(y) = x$ ile tanımlanır

$$f \circ g = I_Y \ , \quad g \circ f = I_X \text{ mi?}$$

$\forall x \in X$ için $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = x$

$$\Rightarrow g \circ f = I_X$$

$\forall y \in Y$ için $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x) = y$

$$\Rightarrow f \circ g = I_Y$$

$\therefore$ g, f nin tersidir.

Teorem: $f: X \longrightarrow Y$, $g: Y \longrightarrow Z$ iki fonksiyon olsun. f ve g fonksiyonlarının tersi varsa $gof: X \longrightarrow Z$ fonksiyonunun da tersi vardır ve $(gof)^{-1} = f^{-1} o g^{-1}$ dir.

İspat: f ve g 1-1 ve örten ise gof de 1-1 ve örten olur. Yani;

- $\forall x, y \in X$ için $(gof)(x) = (gof)(y)$

$\Rightarrow g(f(x)) = g(f(y))$ g, 1-1

$\Rightarrow f(x) = f(y)$ f, 1-1

$\Rightarrow x = y$

$\therefore$ gof 1-1 dir.

- $\forall z \in Z$ için $\exists x \in X \ni (gof)(x) = z$?

g örten $\Rightarrow \forall z \in Z$ için $\exists y \in Y \ni g(y) = z$

f örten $\Rightarrow \forall y \in Y$ için $\exists x \in X \ni f(x) = y$

$\Rightarrow$

$\exists\, x \in X \ni g(f(x)) = g(y) = z$

$\Rightarrow \exists\, x \in X \ni (g \circ f)(x) = z$

$\therefore$ $g \circ f$ örtendir.

$g \circ f$, 1-1 ve örten olduğundan tersi vardır.

$$(g \circ f)^{-1} \circ (g \circ f) = I_X \Rightarrow (g \circ f)^{-1} \circ (g \circ \underbrace{f) \circ f^{-1}}_{I_Y} = I_X \circ f^{-1}$$

$$\Rightarrow (g \circ f)^{-1} \circ g = f^{-1}$$

$$\Rightarrow (g \circ f)^{-1} \circ \underbrace{g \circ g^{-1}}_{I_Z} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

$$\Rightarrow (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

$$\therefore (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Tanım: $(X, \leq)$ ve $(Y, \leq)$ iki sıralı küme ve $f: X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. $\forall\, x_1, x_2 \in X$ için

$$x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

oluyorsa f ye <u>sıra koruyan</u> (artan) fonksiyon denir.

$\forall\, x_1, x_2 \in X$ için

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

oluyorsa f ye <u>kesin artan</u> fonksiyon denir.

Tanım: $f: X \longrightarrow Y$, 1-1 ve örten bir fonksiyon, $(X, \leq)$ ve $(Y, \leq)$ sıralı kümeler olsun. $\forall\, x_1, x_2 \in X$ için

$$x_1 \leq x_2 \Longleftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

oluyorsa f ye <u>sırasal eşyapı</u> fonksiyonu denir.

Teorem: $f: X \longrightarrow Y$ sırasal eşyapı fonksiyonu olsun. $\forall x_1, x_2 \in X$ için $x_1 < x_2 \Longleftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ sağlanır.

Tanım: X ve Y sıralı küme olsun. X den Y ye bir sırasal eşyapı fonksiyonu varsa X ve Y ye <u>sıraca eşyapılıdır</u> denir ve $A \cong B$ ile gösterilir.

Sıraca eş yapılı olma bir denklik bağıntısıdır

Örnek: $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = x^2 - 4x + 3$ fonksiyonu veriliyor $f([2,3]) = ?$ $\quad f^{-1}(\{-18\}) = ?$

$$f([2,3]) = \{f(x) : x \in [2,3]\}$$
$$= \{f(x) : 2 \le x \le 3\}$$

$f(2) = -1$

$f(3) = 0$

$$= [-1, 0]$$

$$f^{-1}(\{-18\}) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = -18\}$$
$$= \varnothing$$

$x^2 - 4x + 3 = -18$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 21 = 0$

$\Delta < 0$

Örnek: $f: X \longrightarrow Y$ fonksiyonu veriliyor. $C \subseteq Y$ için $f^{-1}(Y \setminus C) = X \setminus f^{-1}(C)$ olduğunu gösteriniz.

$$
\begin{aligned}
x \in X \setminus f^{-1}(C) &\Longleftrightarrow x \in X \text{ ve } x \notin f^{-1}(C) \\
&\Longleftrightarrow x \in X \text{ ve } f(x) \notin C \\
&\Longleftrightarrow f(x) \in Y \text{ ve } f(x) \notin C \\
&\Longleftrightarrow f(x) \in Y \setminus C \\
&\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(Y \setminus C)
\end{aligned}
$$

$$\therefore f^{-1}(Y \setminus C) = X \setminus f^{-1}(C)$$

Örnek: $f: A \to B$, $g: C \to D$ iki fonksiyon olsun.

$h: A \times C \longrightarrow B \times D$ biçiminde tanımlanan bir

$(x,y) \longmapsto (f(x), g(y))$

fonksiyon olmak üzere f ve g 1-1 ve örten fonksiyonlar ise h fonksiyonu 1-1 ve örtendir. Gösteriniz.

- h 1-1 mi?

  $\forall (x,y), (z,t) \in A \times C$ için

$$h(x,y) = h(z,t) \Rightarrow (f(x), g(y)) = (f(z), g(t))$$
$$\Rightarrow f(x) = f(z), \quad g(y) = g(t)$$
$$\Rightarrow x = z, \quad y = t$$
$$\Rightarrow (x,y) = (z,t)$$

$\therefore$ h 1-1 dir.

- h örten mi?

$\forall (b,d) \in B \times D$ için $\exists (x,y) \in A \times C \ni h(x,y) = (b,d)$?

$$(b,d) \in B \times D \Rightarrow b \in B \text{ ve } d \in D$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \exists x \in A \ni f(x) = b \text{ ve} \\ \exists y \in C \ni g(y) = d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists (x,y) \in A \times C \ni (f(x), g(y)) = (b,d)$$

$$\Rightarrow \exists (x,y) \in A \times C \ni h(x,y) = (b,d)$$

$\therefore$ h örtendir

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Dr. Öğr. Üyesi Abdullah DERTLİ

Soyut Matematik I

Ünite 8

Ünite 8