UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Fonksiyonlar

Dr. Öğr. Üyesi Abdullah DERTLİ

Ders 7

3

FONKSİYONLAR

Tanım: A ve B boştan farklı iki küme ve f, A dan B ye bir bağıntı olsun. f bağıntısıyla A kümesindeki her bir eleman B kümesindeki bir ve yalnız bir elemanla eşleniyorsa f ye A dan B ye bir fonksiyon denir. f, A dan B ye bir fonksiyon ise

$$f: A \longrightarrow B$$
$$a \longmapsto f(a)$$

ile gösterilir.

A : Tanım kümesi   f(A): Görüntü kümesi

B: Değer kümesi

* $f(a) = b \in B$ elemanına da $a \in A$ elemanının görüntüsü denir.
* $\{(a, f(a)) : a \in A\}$ kümesine de f fonksiyonunun grafiği denir.

4

* $f: A \longrightarrow A$, $a \longmapsto a$ şeklinde tanımlanan fonksiyona birim fonksiyon veya özdeşlik fonksiyon denir ve I_A ile gösterilir.

* $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ olsun.
  i) $\forall x \in A$ için $(x,y) \in f$ olacak şekilde $y \in B$ olmalı
  ii) (x,y); $(x,z) \in f$ ise $y = z$ olmalı

  Yani f nin bir fonksiyon olması için kapalı ve iyi tanımlı olması gerekir. İyi tanımlılık :

  $\forall a_1, a_2 \in A$ için $a_1 = a_2 \Rightarrow f(a_1) = f(a_2)$

* $f: X \longrightarrow Y$ fonksiyon, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ olsun.

  $$f(A) = \{ f(a) : a \in A \}$$

  kümesine A kümesinin f fonksiyonu altındaki görüntü kümesi denir.

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$$

kümesine de B kümesinin f fonksiyonu altındaki <u>ters görüntü kümesi</u> denir.

Tanım: $f: A \longrightarrow B$, $g: C \longrightarrow D$ fonksiyonu verilmiş olsun. $A = C$ ve $B = D$ için $\forall a \in A$ olmak üzere $f(a) = g(a)$ oluyorsa f ve g fonksiyonlarına <u>eşittirler</u> denir ve $f = g$ ile gösterilir.

Tanım: $f: A \longrightarrow B$ bir fonksiyon olsun.

$$\forall x_1, x_2 \in A \text{ için } x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

oluyorsa f <u>bire-bir</u> (1-1) bir fonksiyondur denir. Başka bir ifadeyle

$$\forall x_1, x_2 \in A \text{ için } f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

sağlanıyorsa f 1-1 dir. $f: A \xrightarrow{1-1} B$ veya $f: A \longleftrightarrow B$ ile gösterilir.

Örnek: • $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = 2x+1$$

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$ mi?

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1$$
$$\Longrightarrow 2x_1 = 2x_2$$
$$\Longrightarrow x_1 = x_2$$

$\therefore$ f, 1-1 bir fonksiyondur.

• $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto g(x) = |x-1|$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ için

$$g(x) = g(y) \Longrightarrow |x-1| = |y-1|$$

$x = 3$, $y = -1$ için $f(3) = 2$, $f(-1) = 2$ ama $3 \neq -1$

olduğundan g 1-1 bir fonksiyon değildir.

7

Tanım: $f: A \to B$ bir fonksiyon olsun. Her $b \in B$ için $f(a)=b$ olacak şekilde en az bir tane $a \in A$ elemanı varsa f fonksiyonu örtendir denir. Yani;

$$\forall b \in B \text{ için } \exists a \in A \ni f(a)=b$$

oluyorsa f fonksiyonu örtendir. $f: A \xrightarrow{\text{örten}} B$ veya $f: A \twoheadrightarrow B$ ile gösterilir.

Örnek: • $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = 3x-1$ örten bir fonksiyondur.

• $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x) = x^2$ $g(x) = -2$ olacak şekilde $x \in \mathbb{R}$ olmadığından örten değildir.

8

Tanım: $f: X \to Y$ fonksiyonu verilsin. $b \in Y$ sabit bir eleman olmak üzere her $x \in X$ için $f(x)=b$ oluyorsa f fonksiyonuna sabit fonksiyon denir.

Tanım: $f: X \to Y$ bir fonksiyon ve $A \subseteq X$ olsun. $\forall a \in A$ için $g(a)=f(a)$ ile tanımlanan g fonksiyonuna f fonksiyonunun A kümesine kısıtlanışı denir. $g = f\downarrow_A$ ile gösterilir.

Aynı şartlarda f fonksiyonuna g fonksiyonunun genişletilmiş fonksiyonu denir ve $f = g\uparrow_X$ ile gösterilir.

Tanım: $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ iki fonksiyon olsun. $\forall x \in X$ için $h(x) = g(f(x))$ biçiminde tanımlanan $h: X \to Z$ fonksiyonuna f ile g fonksiyonlarının bileşke fonksiyonu denir ve $h = g \circ f$ ile gösterilir.

9

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

Teorem: $f: X \longrightarrow Y$ ve $g: Y \longrightarrow Z$ iki fonksiyon olsun.

i) $g\circ f$, 1-1 bir fonksiyon ise f 1-1 dir.

ii) $g\circ f$, örten bir fonksiyon ise g örtendir.

İspat: i) $g\circ f$, 1-1 bir fonksiyon olsun. f 1-1 mi?

$\forall x, y \in X$ için $f(x) = f(y) \Rightarrow g(f(x)) = g(f(y))$

$\Rightarrow (g\circ f)(x) = (g\circ f)(y)$

$\Rightarrow x = y$

$\therefore$ f 1-1 dir.

10

ii) $g\circ f$, örten bir fonksiyon olsun. g örten mi?

$\forall z \in Z$ için $\exists y \in Y \ni g(y) = z$ mi?

$g\circ f$ örten $\Rightarrow \forall z \in Z$ için $\exists x \in X \ni (g\circ f)(x) = z$

$\Rightarrow \forall z \in Z$ için $\exists x \in X \ni g(\underbrace{f(x)}_{\in Y}) = z$

$\Rightarrow \forall z \in Z$ için $\exists y \in Y \ni g(y) = z$

$\therefore$ g örtendir.

Teorem: $f: X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon, $A_1, A_2 \subseteq X$ ve $B_1, B_2 \subseteq Y$ olsun.

i) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

ii) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$

11

iii) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

iv) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

özellikler: sağlanır.

İspat: i) $f(x) \in f(A_1 \cup A_2) \Leftrightarrow x \in A_1 \cup A_2$
$\Leftrightarrow x \in A_1$ veya $x \in A_2$
$\Leftrightarrow f(x) \in f(A_1)$ veya $f(x) \in f(A_2)$
$\Leftrightarrow f(x) \in f(A_1) \cup f(A_2)$

ii) $f(x) \in f(A_1 \cap A_2) \Longrightarrow x \in A_1 \cap A_2$
$\Longrightarrow x \in A_1$ ve $x \in A_2$
$\Longrightarrow f(x) \in f(A_1)$ ve $f(x) \in f(A_2)$
$\Longrightarrow f(x) \in f(A_1) \cap f(A_2)$

$\therefore f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$

12

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$ $\qquad A_1 = \{-1, -2, 3, 4\}$, $A_2 = \{1, 2, 3, 4\}$

$A_1 \cap A_2 = \{3, 4\}$ $\qquad f(A_1) = \{1, 4, 9, 16\}$

$f(A_1 \cap A_2) = \{9, 16\}$ $\qquad f(A_2) = \{1, 4, 9, 16\}$

$f(A_1) \cap f(A_2) = \{1, 4, 9, 16\}$

$f(A_1) \cap f(A_2) \neq f(A_1 \cap A_2)$

Eğer f 1-1 ise eşitlik sağlanır. Yani;

$f(x) \in f(A_1) \cap f(A_2) \Longrightarrow f(x) \in f(A_1)$ ve $f(x) \in f(A_2)$
$\Longrightarrow f(x) = f(a_1), a_1 \in A_1$ ve $f(x) = f(a_2), a_2 \in A_2$
$\Longrightarrow f(x) = f(a_1) = f(a_2) \Longrightarrow a_1 = a_2 = x$
$\xRightarrow{f\ 1\text{-}1} x \in A_1$ ve $x \in A_2 \Longrightarrow x \in A_1 \cap A_2$
$\Longrightarrow f(x) \in f(A_1 \cap A_2)$

iii) $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) \iff f(x) \in B_1 \cup B_2$
$\iff f(x) \in B_1$ veya $f(x) \in B_2$
$\iff x \in f^{-1}(B_1)$ veya $x \in f^{-1}(B_2)$
$\iff x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

iv) $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) \iff f(x) \in B_1 \cap B_2$
$\iff f(x) \in B_1$ ve $f(x) \in B_2$
$\iff x \in f^{-1}(B_1)$ ve $x \in f^{-1}(B_2)$
$\iff x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

Önerme: $f : X \to Y$ bir fonksiyon, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ olsun.

i) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$

ii) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$

f 1-1 ise $f^{-1}(f(A)) = A$
f örten ise $f(f^{-1}(B)) = B$ olur.

İspat: **i)** $x \in A \implies f(x) \in f(A)$
$\implies x \in f^{-1}(f(A))$

f 1-1 ise
$x \in f^{-1}(f(A)) \implies f(x) \in f(A)$
$\implies \exists y \in A \ni f(x) = f(y)$
$\xRightarrow{f\ 1\text{-}1} x = y$
$\implies x \in A$

ii)
$y \in f(f^{-1}(B)) \implies \exists x \in A$ için $\exists x \in f^{-1}(B) \ni f(x) = y$
$\implies y \in B$

f örten ise
$y \in B \xRightarrow[f \text{ örten}]{} \exists x \in A \ni f(x) = y$
$\implies x \in f^{-1}(B)$
$\implies f(x) \in f(f^{-1}(B))$

15

Tanım: A kümesi ve $C \subseteq A$ kümesi verilmiş olsun. $\forall c \in C$ için $i(c) = c$ ile tanımlanan $i : C \longrightarrow A$ fonksiyonuna içerme fonksiyonu denir.

Teorem: $f : A \longrightarrow B$ fonksiyon, $\{A_i : i \in I\} \subseteq P(A)$, $\{B_j : j \in J\} \subseteq P(B)$ olsun.

i) $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$

ii) $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$

iii) $f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$

iv) $f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$

Not: i) $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$, $h : C \longrightarrow D$ olmak

16

UZEM ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Dr. Öğr. Üyesi Abdullah DERTLİ

Soyut Matematik I

Ünite 7

Ünite 7