ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Dijital Ders Platformu

Normal Alt Gruplar

Prof. Dr. Şenol EREN

Ders 16

Teorem 3.5.19 H ve K bir G grubunun sonlu iki alt grubu iseler $|HK| = \dfrac{|H|.|K|}{|H\cap K|}$ dır.

İspat: $A = H\cap K$ ve $n = \dfrac{|H|}{|A|} = [H:A]$ diyelim.
H nın A alt grubuna göre sol kolon sınıfları $\{x_1A, \dots, x_nA\}$ olsun. $H = \bigcup\limits_{i=1}^{n} x_iA$ dir. $A \leq K$ olduğundan $AK = K$ olduğu göz önüne alınarak $HK = (\bigcup\limits_{i=1}^{n} x_iA)K = \bigcup\limits_{i=1}^{n} x_iK$ bulunur. $\forall\, i\neq j$ için x_iA ve x_jA farklı olduğundan x_iK ve x_jK da farklıdır. $\exists\, i\neq j$ için $x_iK = x_jK$ olsa $x_j^{-1}x_i \in K$ dolayısıyla $x_j^{-1}x_i \in A = H\cap K$ çelişkisi bulunurdu. $\{x_1K, \dots, x_nK\}$ lar K ya göre sol denklik sınıflarıdır.
$|K| = |x_iK|$ olup $|HK| = |x_1K| + \dots + |x_nK| = n.|K|$
$|HK| = \dfrac{|H|}{|A|}.|K| = \dfrac{|H||K|}{|H\cap K|}$ bulunur.

Teorem 3.5.20 G bir grup, $N \leq G$ olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

i) $\forall a \in G, \forall x \in N$ için $axa^{-1} \in N$ dir

ii) $\forall a \in G$ için $aNa^{-1} \subset N$ dir

iii) $\forall a \in G$ için $aNa^{-1} = N$ dir.

iv) $\forall a \in G$ için $aN = Na$ dır.

İspat: i $\Rightarrow$ ii: $aNa^{-1} = \{axa^{-1} \mid x \in N\}$ $\forall a \in G, \forall x \in N$ için $axa^{-1} \in N$ olduğundan $aNa^{-1} \subset N$ dir.

ii $\Rightarrow$ iii: $\forall a \in G$ için $aNa^{-1} \subset N$ olsun. $a^{-1} \in G$ içinde $a^{-1}Na \subset N \Rightarrow N \subset aNa^{-1}$ olacağından $aNa^{-1} = N$ bulunur.

iii $\Rightarrow$ iv: $\forall a \in G$ için $aNa^{-1} = N \Rightarrow aN = Na$ dır.

iv $\Rightarrow$ i : $\forall a \in G$ için $aN = Na$ olsun. $\forall a \in G$ için $aNa^{-1} = N$ yani $\forall x \in N$ için $axa^{-1} \in N$ bulunur.

Tanım 3.5.21 Teoremin denk koşullarından birini sağlayan G nin N alt grubuna normal alt grup denir ve $N \lhd G$ ile gösterilir.

Şu halde $N \lhd G$ ise sağ ve sol denklik sınıfları aynıdır. G değişmeli ise her alt grubu normal altgruptur.

Tanım 3.5.22 G bir grup $N \lhd G$ olsun. G nin N ye göre sağ (sol) denklik sınıflarının kümesi G/N ile gösterilir.

Örnek 3.5.23 $M = \{g \in G \mid \forall x \in G, \ gx = xg\}$ olsun. $M \lhd G$ dir.

Teorem 3.5.24 G bir grup $N \triangleleft G$ olsun. $\forall aN, bN \in G/N$ için $(aN)(bN) = (ab)N$ dir.

İspat: $N \triangleleft G$ olduğundan $\forall a \in G$ için $aN = Na$ dır.
$(aN)(bN)$ nin her hangi bir elemanı $x_1, x_2 \in N$ için $(ax_1)(bx_2) = a(x_1 b)x_2$ şeklindedir. $x_1 b = bx$, $\exists x \in N$ var. $(ax_1)(bx_2) = a(x_1 b)x_2 = a(bx)x_2 = (ab)xx_2 \in (ab)N$
buradan $(aN)(bN) \subset (ab)N$, Tersine
$(ab)x \in (ab)N \Rightarrow \forall y \in N$ için
$(ab)x = a(yy^{-1})bx = (ay)(y^{-1}b)x$, $y^{-1}b \in Nb = bN$ olduğundan
$y^{-1}b = bx_1$, $\exists x_1 \in N$
$(ab)x = (ay)(bx_1)x = (ay)(bx_1 x) \in (aN)(bN)$ bulunur.
Üstelik sol denklik sınıfları çarpımı temsilciye bağlı değildir.

$aN = a_1N$ ve $bN = b_1N \Longrightarrow a_1^{-1}a = x \in N$ ve $b_1^{-1}b = x_1 \in N$

$\Longrightarrow a = a_1x$ ve $b = b_1x_1$

$\Longrightarrow ab = (a_1x)(b_1x_1) = a_1(xb_1)x_1$

buradan $N \triangleleft G$ olduğundan $xb_1 \in Nb_1 = b_1N \Longrightarrow$
$xb_1 = b_1x_2$, $\exists x_2 \in N$ var. Şu halde
$ab = a_1(b_1x_2)x_1 = a_1b_1(x_2x_1) \in (a_1b_1)N$ olduğundan
$(ab)N = (a_1b_1)N$ elde edilir.

Teorem 3.5.25 $N \triangleleft G$ ise G/N gruptur.

Tanım 3.5.26 $N \triangleleft G$ ise G/N grubuna Gnin Nye göre bölüm grubu denir.

Teorem 3.5.27 G sonlu bir grup $N \triangleleft G$ ise G/N de sonlu bir grup ve $|G/N| = \frac{|G|}{|N|}$ dir.

İspat: G sonlu grup ise N ye göre sol denklik sınıfları sayısı sonlu ve Lagrange Teoremine göre $|G/N| = \frac{|G|}{|N|}$ dir.

Örnek 3.5.28 $N = \langle 4 \rangle = 4\mathbb{Z}$ alt grubu için $\mathbb{Z}/N$ yi bulalım.

Teorem 3.5.29 G bir grup ve $N \leq G$ olsun. $[G:N]=2$ ise N, Gnin normal alt grubudur.

İspat: $N \leq G$ ve $[G:N]=2$ olsun. $a \notin N$ ise sol denklik sınıfları N, aN; sağ denklik sınıflarıda N, Na olur. $G = N \cup aN = N \cup Na$ olmasından $aN = Na = G - N$ olup $N \triangleleft G$ bulunur.

Teorem 3.5.30 $N \triangleleft G$ ve $N \leq K \leq G$ ise $N \triangleleft K$ ve $K/N \leq G/N$ dir. Ayrıca $N \leq K \triangleleft G$ ise $K/N \triangleleft G/N$ dir. Tersine G/N nin alt grupları $N \leq K \leq G$ olmak üzere K/N şeklinde ve normal alt gruplarıda $N \leq K \triangleleft G$ olmak üzere K/N şeklindedir.

İspat: $N \triangleleft G$ ve $N \leq K \leq G$ olsun $N \triangleleft K$ aşikardır. $\forall k \in K$ için $kN \in K/N$ sınıfı G/N de bir elemanı olur. $K/N \leq G/N$ dir

$K \triangleleft G$ ise $\forall g \in G, \forall k \in K$ için $gkg^{-1} \in K$ olur. $\forall gN \in G/N$ için $(gN)(kN)(gN)^{-1} = (gkg^{-1})N \in K/N$ olup $K/N \triangleleft G/N$ dir.
Tersine $\overline{K} \leq G/N$ alalım. $K = \{g \in G \mid gN \in \overline{K}\}$ olsun.
$\forall k_1, k_2 \in K$ için $k_1N, k_2N \in \overline{K}$ ve $\overline{K} \leq G/N$ olduğundan $(k_1N)(k_2N)^{-1} = k_1k_2^{-1}N \in \overline{K}$ den $k_1k_2^{-1} \in K$ olup $K \leq G$ bulunur. $\forall x \in N$ için $xN = N$ ve N, G/N nin birimi olduğundan $\overline{K}$ dedir. $N \leq K$ bulunur. $\overline{K} \triangleleft G/N$ ise $\forall g \in G$ ve $\forall k \in K$ için $(gkg^{-1})N = (gN)(kN)(gN)^{-1} \in \overline{K}$ olup $gkg^{-1} \in K$ olacağından $K \triangleleft G$ dir.

Tanım 3.5.31. Bir G grubunun öz, hiç bir normal alt grubu yoksa G ye basit grup denir.

Örnek 3.5.32. $|G| = p$ $(p \in \mathbb{P})$ ise G basit gruptur.

Tanım 3.5.33 G bir grup, $N \triangleleft G$ olsun. N yi kapsayan, M ve G den başka hiç bir normal alt grup yoksa M ye G nin bir maksimal normal alt grubu denir.

Örnek 3.5.34 $\mathbb{Z}$ de $N = 3\mathbb{Z} = \langle 3 \rangle$ normal alt grubu maksimal alt gruptur.

Teorem 3.5.35 $N \triangleleft G$ maksimal normal alt grup $\Leftrightarrow$ G/N basit gruptur.

İspat: ($\Rightarrow$) $N \triangleleft G$ maksimal olsun. $\bar{K} \triangleleft G/N$ ise G de öyle bir $K \triangleleft G$ vardır ki $N \triangleleft K$ ve $\bar{K} = K/N$ dir. Fakat N maksimal olduğundan $M = K \vee K = G$ dir. Bu durumda $\bar{K}$, G/N nin öz olmayan normal alt grubudur.

$\Leftarrow$ G/N basit olsun. Teorem 3.5.26 göre G nin N yi kapsayan N ve G den başka hiç bir normal alt grubu olmaz yani $N \triangleleft G$ maksimaldir.

TEŞEKKÜRLER…