Fırsatlar Sunar

Alt Gruplar ve Permütasyon Grupları ile ilgili Uygulamalar

Soru: $n>1$ bir tamsayı ve a sabit bir tamsayı olsun. Buna göre $H=\{x\in\mathbb{Z} \mid ax\equiv 0 (n)\}$ kümesinin $(\mathbb{Z},+)$ grubunun bir alt grubu olduğunu gösteriniz

Çözüm: $H\neq\emptyset$: $0\in\mathbb{Z}$ $a.0\equiv 0(n)$ olduğundan $0\in H$ olup $H\neq\emptyset$.

$H\subseteq\mathbb{Z}$; Tanımdan açık

$\forall x,y\in H$ için $x-y\in H$ olduğunu göstermeliyiz

$$\left.\begin{array}{l} x\in H \Rightarrow ax\equiv 0(n) \Rightarrow n\mid ax \\ y\in H \Rightarrow ay\equiv 0(n) \Rightarrow n\mid ay \end{array}\right\} \Rightarrow n\mid ax-ay$$

$$\Rightarrow n\mid a(x-y)$$

$$\Rightarrow a(x-y)\equiv 0(n)$$

$$\Rightarrow x-y\in H$$

$$(H,+)\leq(\mathbb{Z},+)$$

Soru: G bir grup $H \subseteq G$ olsun. $M(H) = \{a \in G \mid aHa^{-1} = H\} \leq G$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $M(H) \leq G$ olduğunu göstermek için öncelikle

$M(H) \neq \emptyset$: G bir grup ise $e \in G$ vardır. $H \subseteq G$ olduğundan $\forall h \in H$ için $h \in G$ olur $eh = he = h \Rightarrow eH = He$

$\Rightarrow eHe^{-1} = H$

$\Rightarrow e \in M(H)$

$M(H) \subseteq G$: $M(H)$'in tanımından açık

$\forall a, b \in M(H)$ için $ab^{-1} \in M(H)$ olduğunu göstermeliyiz

$$(ab^{-1}) H (ab^{-1})^{-1} = ab^{-1}H ba^{-1} = a(b^{-1}Hb)a^{-1}$$

$$= aHa^{-1}$$

$= H$ olup $M(H) \leq G$ dir.

Soru: G bir grup, H ve K G'nin iki alt grubu olsun. $HK \leq G$ ise HK'nın $H \cup K$ ile üretilen alt grup olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $HK = \langle H \cup K \rangle$ olduğunu gösterelim.

G grup $H \leq G$, $K \leq G$ olduğundan $e \in G \wedge e \in H \wedge e \in K$ dır.

$$\left.\begin{array}{l} \forall h \in H \text{ için } \quad h = he \in HK \\ \forall k \in K \text{ için } \quad k = ek \in HK \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} H \subseteq HK \\ K \subseteq HK \end{array}\right\} \Rightarrow H \cup K \subseteq HK$$

Ayrıca $H \cup K \subseteq \langle H \cup K \rangle$ olup $\langle H \cup K \rangle$, $H \cup K$'yı içeren en küçük alt grup tur

$$\langle H \cup K \rangle \subseteq HK \quad \text{--- (1) ---}$$

$\forall hk \in HK$ alalım.

$$\left.\begin{array}{l} H \subseteq H \cup K \subseteq \langle H \cup K \rangle \\ K \subseteq H \cup K \subseteq \langle H \cup K \rangle \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \forall h \in H \Rightarrow h \in \langle H \cup K \rangle \text{ ve} \\ \forall k \in K \Rightarrow k \in \langle H \cup K \rangle \end{array}$$

olup $\langle H \cup K \rangle$ alt grup old. $hk \in \langle H \cup K \rangle$ yazılır

$$HK \subseteq \langle H \cup K \rangle \quad \text{--- (2) ---}$$

(1) ve (2) den istenen eşitlik elde edilir

Soru: Aşağıdaki permütasyonların mertebelerini bulunuz
Tek veya çift olma durumlarını belirtiniz

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 3 & 5 & 7 & 6 & 8 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

b) $(1\ 5\ 2\ 3\ 7)\ (3\ 4\ 2\ 9\ 5\ 6)$

Çözüm: Öncelikle verilen permütasyonları ayrık devirlerin çarpımı olarak yazalım.

a) $(1\ 9\ 4\ 7)(2\ 3\ 5\ 6\ 8)$

Mertebe ekok $(4, 5) = 20$

Teklik ve çiftlik için permütasyonu transpozisyonların çarpımı olarak yazalım

$(1\,7)\ (1\ 4)\ (1\,9)(2\,8)(2\ 6)(2\,5)(2\,3)$ olup 7 tane yani tek permütasyon

b) $(1\ 5\ 6\ 7)\ (2\ \ 9)\ \ (3\ \ 4)$

Mertebe ekok$(4,2,2) = 4$

Transpozisyonları $(1\ 7)(1\,6)(1\,5)(2\,9)(3\ 4)$ olup 5 tane yani tek permütasyondur

Soru: $\pi = (1\ 3\ 2) \in S_3$ permütasyonunun $\alpha = (1,2) \in S_3$ elemanı ile eşleniğini bulunuz

Çözüm: $\alpha \pi \alpha^{-1} = (\alpha(1)\, \alpha(3)\, \alpha(2))$

$= (2\ \ 3\ \ 1)$ olarak bulunur

Soru: $f = (1\,4\,7)(2\,5\,8)$ $h = (1\,5\,4)(2\,3\,6)$

$gfg^{-1} = h$ olacak şekilde bir g permütasyonu bulunuz

Çözüm: $gfg^{-1} = h \Rightarrow (g(1)\, g(4)\, g(7))(g(2)\, g(5)\, g(8))$

$= (1\ \ 5\ \ 4\ )(\ 2\ \ 3\ \ 6)$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 7 & 5 & 3 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$g = (3\ 7\ 4\ 5)(6\ 8)$ seçilebilir

5

Soru: S_4 de $\alpha = (1\ 3\ 4)(1\ 2\ 4)$ permütasyonunun mertebesini ve $M(\alpha)$ merkezleştiricisini bulunuz.

Çözüm: $\alpha = (1\ 2)(3\ 4)$

$M(\alpha) = \{\beta \in S_4 \mid \beta\alpha\beta^{-1} = \alpha\}$

$$\beta\alpha\beta^{-1} = \alpha \Rightarrow (\beta(1)\ \beta(2))(\beta(3)\ \beta(4)) = \begin{array}{l} (1\ 2)(3\ 4) \\ (1\ 2)(4\ 3) \\ (2\ 1)(3\ 4) \\ (2\ 1)(4\ 3) \\ (3\ 4)(1\ 2) \\ (3\ 4)(2\ 1) \\ (4\ 3)(1\ 2) \\ (4\ 3)(2\ 1) \end{array}$$

$M(\alpha) = \{I, (3\ 4), (2\ 1), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4),$
$(1\ 3\ 2\ 4), (1\ 4\ 2\ 3), (1\ 4)(2\ 3)\}$

6

Soru : D_4 dihedral grubunun elemanlarını belirleyiniz

Çözüm : Hatırlatma : $n \geq 3$ bir tamsayı olsun. n kenarlı düzgün bir çokgenin tüm dönme ve yansımalarının oluşturduğu gruba dihedral grup denir ve D_n ile gösterilir. Çokgenin bir köşesi A olmak üzere O merkezi ve A dan geçen doğruya göre yansımayı b, 0° lik dönmeyi 1, $\frac{360}{n}$ derecelik dönmeyi a ile gösterecek olursak ; n tane dönmeyi $1, a, \dots, a^{n-1}$ ve n tane yansımayı $b, ab, \dots, a^{n-1}b$ ile ifade edebiliriz. O halde D_n'in tüm elemanları a ve b'nin kuvvetlerinin çarpımı ile elde edilmiş olur. Bu durumda

$D_n = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}, b, ab, a^2b, \dots, a^{n-1}b\}$ ile ifade edilen bir gruptur. Şimdi de D_4'ü yani karenin tüm dönme ve yansımalarından oluşan grubu elde edelim.

Bu durumda karenin hiç hareket etmemesi (1) ile gösterilir. Karenin merkezi etrafında saat yönünün tersine 90° dönmesini $\alpha = (1\ 2\ 3\ 4)$ ile gösterir isek $\alpha^2 = (1\ 3)(2\ 4)$, $\alpha^3 = (1\ 4\ 3\ 2)$ bulunur.

h yatay ekseni etrafında bir yansımayı $\beta = (1\ 4)(2\ 3)$ alırsak $\alpha\beta = (2\ 4)$, $\alpha^2\beta = (1\ 2)(3\ 4)$, $\alpha^3\beta = (1\ 3)$ elde edilir.

$D_4 = \{e, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \beta, \alpha\beta, \alpha^2\beta, \alpha^3\beta\}$ olarak bulunmuş olur.

Soru : Q_8 Kuaterniyonlar Grubunun elemanlarını belirleyiniz

Çözüm : Kuaterniyonlar genel olarak
$a+bi+cj+dk$ şeklinde ifade edilir.
$i^2=j^2=k^2=-1$ dir. Çarpma işlemi ise
$ij=k \quad , \quad j.i=-k$
$jk=i \quad , \quad kj=-i$ ile elde edilir
$ki=j \quad , \quad ik=-j$
Bu durumda,
$Q_8=\{1,-1,i,-i,j,-j,k,-k\}$ kümesi
yukarıdaki işlem tanımına göre bir grup oluşturur

Soru : A_4 alterne grubunun elemanlarını belirleyiniz

Çözüm : S_n simetrik grubunun çift permütasyonlarından oluşan alt grubuna alterne grup denilir ve A_n ile gösterilir.

O halde A_4 de S_4'ün çift permütasyonlarından oluşan alt grubudur. S_4'ün eleman sayısı $4!$ ise A_4'ün eleman sayısı $\frac{4!}{2} = 12$ dir

$A_4 = \{ (1), (1\,2\,4), (1\,2\,3), (1\,3\,2), (1\,3\,4), (1\,4\,2), (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4\,3), (2\,3\,4), (2\,4\,3), (1\,4)(2\,3) \}$ ile bulunur.

Teşekkürler

Arş. Gör. Çağla ÖZYILMAZ

Cebir -I

Alt Gruplar ve Permütasyon Grupları ile ilgili Uygulamalar

Uygulama