



UZOM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



1

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Kümeler Cebiri

Dr. Öğr. Üyesi Abdullah DERTLİ

Ders3

KÜMELER CEBİRİ

2

Tanım: Küme bir takım nesnelerin bir topluluğudur. Kümeyi oluşturan nesnelerin herbirine de o kümenin bir elemanı denir.

Kümeler büyük harflerle gösterilir.

$x \in A$ (x , A kümesine ait)

$x \notin A$ (x , A kümesine ait değil)

Hic bir elemanı olmayan kümeye baş küme denir ve \emptyset veya $\{\}$ ile gösterilir.

Örnek: $X = \{x \in \mathbb{N} : |x-3| < 2\}$

$$|x-3| < 2 \Rightarrow 1 < x < 5$$

$$X = \{2, 3, 4\}$$

Tanım: A ve B herhangi iki küme olsun. A kümesinin her bir



Scanned with
CamScanner

elemanı B kümesinin de bir elemanı ise A kümesi B kümesinin bir alt kümesidir denir. $A \subseteq B$ ile gösterilir.

$$A \subseteq B \quad (A \text{ alt küme } B)$$

$$B \supseteq A \quad (B \text{ kapsar } A)$$

$$* A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$$

Tanım: (Eşit Küme)

A ve B kümeleri verilsin.

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

$$\Leftrightarrow [\forall x \in A \Rightarrow x \in B] \wedge [\forall x \in B \Rightarrow x \in A]$$

Tanım: A kümesi B kümesinin bir alt kümesi ve $A \neq B$ ise A kümesine B kümesinin öz alt kümesi denir.



Scanned with
CamScanner

Tanım: A ve B kümelerinin eleman sayıları eşit ise A ile B kümesine denk kümeler denir ve $A \equiv B$ ile gösterilir.

NOT: 1) Kümenin elemanlarının yerleri değişebilir.

2) Bir eleman bir kez kullanılır.

3) $S(A)$, A kümesinin eleman sayısını gösterir.

$$S(A) = n \Rightarrow A \text{ sonlu küme}$$

$$S(A) = \infty \Rightarrow A \text{ sonsuz küme}$$

4) $S(A) = n$ ise A'nın alt kümelerinin sayısı 2^n dir.

A'nın alt kümelerinin kümesine A'nın kuvvet kümesi denir ve $P(A)$ veya 2^A ile gösterilir.

$$S(A) = n \Rightarrow S(P(A)) = 2^n$$

5) n elemanlı bir kümenin n li kombinasyonlarının sayısı

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$$



Scanned with
CamScanner

$$r+s=n \Rightarrow \binom{n}{r} = \binom{n}{s}$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Örneğin: $A = \{1, 2\}$ kümesinin kuvvet kümesi
 $P(A) = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\} \}$

Tanım: Belirli bir tartışmada ya da incelemede sözü geçen tüm kümeleri alt küme olarak alın belirli bir kümeye evrensel küme denir. E harfi ile gösterilir.

Tanım: E evrensel küme, $A \subseteq E$ olsun. E'nin A da olmayan elemanlarının kümesine A'nın tümleyeni denir. A kümesinin tümleyeni A' veya A^c veya A^c ile gösterilir.

$$A' = \{ x \in E : x \in E, x \notin A \}$$

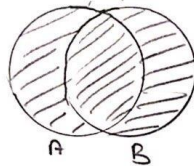
Tanım: A ve B iki küme olsun. A kümesinde veya B



Scanned with
CamScanner

kümesinde bulunan tüm elemanların kümesine A ile B kümesinin birleşimi denir. $A \cup B$ ile gösterilir.

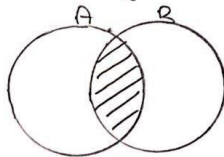
$$A \cup B = \{ x : x \in A \text{ veya } x \in B \}$$



$A \cup B$

Tanım: A ve B iki küme olsun. Hem A kümesinde hem de B kümesinde olan elemanların kümesine A ile B'nin kesişimi veya aritajı denir. $A \cap B$ ile gösterilir.

$$A \cap B = \{ x : x \in A \text{ ve } x \in B \}$$



$A \cap B$

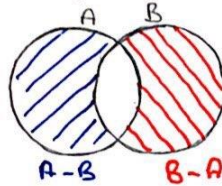


Scanned with
CamScanner

Örneği: $A = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 = 9\}$
 $B = \{y \in \mathbb{Z} : y < 13\} \Rightarrow A \cap B = \{-3, 3\}$

Tanım: A ve B iki küme olsun. A kümesinde olan ve B kümesinde olmayan elemanların kümesine A ile B kümesinin farkı denir. $A \setminus B$ veya $A - B$ ile gösterilir.

$$A - B = \{x : x \in A \text{ ve } x \notin B\}$$



Teorem: E evrensel küme ve $A, B, C \subseteq E$ olsun.

i) $\emptyset \subseteq A$

ii) $A \subseteq A$

iii) $A \subseteq A \cup B$

$B \subseteq A \cup B$



Scanned with
CamScanner

iv) $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$

v) $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

İspat: v) $A \subseteq B$ ve $B \subseteq C$ olsun. $A \subseteq C$ mi?

$$\forall x \in A \implies x \in B$$

$$A \subseteq B$$

$$\implies x \in C$$

$$B \subseteq C$$

$$\therefore A \subseteq C$$

Teorem: E evrensel küme $A \subseteq E$ olsun.

i) $A \cup \emptyset = A$

ii) $A \cup E = E$

iii) $\emptyset' = E$

iv) $A \cup A' = E$

i') $A \cap \emptyset = \emptyset$

ii') $A \cap E = A$

iii') $E' = \emptyset$

iv') $A \cap A' = \emptyset$



Scanned with
CamScanner

Teorem: E evrensel küme ve $A, B \subseteq E$ olsun.

- i) $A' = E - A$ iv) $A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$
 ii) $A - B = A \cap B'$ v) $(A \cap B)' = A' \cup B'$
 iii) $(A')' = A$ vi) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

İspat: ii) $\forall x \in A - B \iff x \in A \text{ ve } x \notin B$
 $\iff x \in A \text{ ve } x \in B'$
 $\iff x \in A \cap B'$
 $\therefore A - B = A \cap B'$

veya

$$A - B = \left\{ x : x \in A \text{ ve } x \notin B \right\}$$

$$= \left\{ x : x \in A \text{ ve } x \in B' \right\} = A \cap B'$$

vi) $(A \cup B)' = \left\{ x : x \notin A \cup B \right\}$
 $= \left\{ x : x \notin A \text{ ve } x \notin B \right\}$
 $= \left\{ x : x \in A' \text{ ve } x \in B' \right\}$
 $= A' \cap B'$



Scanned with
CamScanner

Teorem: A, B ve C kümeleri verilsin.

- i) $A \cup A = A$ i)' $A \cap A = A$
 ii) $A \cup B = B \cup A$ ii)' $A \cap B = B \cap A$
 iii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ iii)' $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$
 iv) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ iv)' $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
 v) $A \cup B = B \iff A \subseteq B$ v)' $A \cap B = A \iff A \subseteq B$

İspat: iv) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$?
 $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C) \dots \text{①}$ gösterilmeli
 $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C) \dots \text{②}$

$$\forall x \in A \cap (B \cup C) \iff x \in A \text{ ve } x \in B \cup C$$

$$\iff x \in A \text{ ve } (x \in B \text{ veya } x \in C)$$

$$\iff (x \in A \text{ ve } x \in B) \text{ veya } (x \in A \text{ ve } x \in C)$$

$$\iff x \in A \cap B \text{ veya } x \in A \cap C$$

$$\iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$



Scanned with:
CamScanner

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$v) ANB = A \Leftrightarrow A \subseteq B$$

$$ANB = A \Rightarrow A \subseteq B \quad \dots \textcircled{1} \quad \text{gösterilmeli}$$

$$A \subseteq B \Rightarrow ANB = A \quad \dots \textcircled{2}$$

- $ANB = A$ olsun. $A \subseteq B$ mi?

$$\forall x \in A \Rightarrow x \in A = ANB$$

$$\Rightarrow x \in B \Rightarrow A \subseteq B \quad \dots \textcircled{1}$$

- $A \subseteq B$ olsun. $ANB = A$ mi?

$$\forall x \in ANB \Rightarrow x \in A \Rightarrow ANB \subseteq A$$

$$\forall x \in A \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \in ANB \Rightarrow A \subseteq ANB$$

$$\Rightarrow ANB = A \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ ve $\textcircled{2}$ den $ANB = A \Leftrightarrow A \subseteq B$ dir.

Tanım: Arakesiti boş olan iki kümeye ayrık kümeler denir.



Scanned with
CamScanner

Tanım: A ve B iki küme olsun. $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ kümesine A ile B kümelerinin simetrik farkı denir ve $A \Delta B$ ile gösterilir.

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) \\ = (A - B) \cup (B - A)$$

Örnek: $A = \{a, b, c, d\}$ $B = \{d, e, f\}$

$$A \Delta B = \{x : x \in A \cup B \text{ ve } x \notin A \cap B\} \\ = \{a, b, c, e, f\}$$

Not: A ve B sonlu iki küme olsun.

$$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$$

Örnek: $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 4 \leq 0\}$

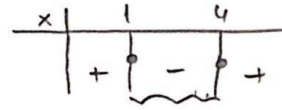
$B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 7x + 10 \geq 0\}$ olsun.



Scanned with
CamScanner

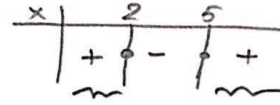
$$x^2 - 5x + 4 = (x-4)(x-1)$$

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 4\} = [1, 4]$$



$$x^2 - 7x + 10 = (x-5)(x-2)$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 2 \vee x \geq 5\} \\ = (-\infty, 2] \cup [5, \infty)$$



$$* A \cup B = \{x \in \mathbb{R} : x \in A \text{ veya } x \in B\} \\ = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 4 \text{ veya } x \geq 5\} = (-\infty, 4] \cup [5, \infty)$$

$$* A \cap B = \{x \in \mathbb{R} : x \in A \text{ ve } x \in B\} \\ = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 2\} = [1, 2]$$

$$* A - B = \{x \in \mathbb{R} : x \in A \text{ ve } x \notin B\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : x \in A \text{ ve } x \in B'\} \\ = \{x \in \mathbb{R} : 2 < x \leq 4\} = (2, 4]$$



Scanned with
CamScanner

Örnek: $A \cup B = E$ ise $A' \subseteq B$ dir. Gösteriniz.

$A \cup B = E$ olsun. $A' \subseteq B$ mi?

$$\forall x \in A' \Rightarrow x \in E \\ \Rightarrow x \in A \cup B \\ \Rightarrow x \in B \Rightarrow A' \subseteq B$$

Örnek: $A - B = B' - A'$ olduğunu gösteriniz.

$$\forall x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \text{ ve } x \notin B \\ \Leftrightarrow x \notin A' \text{ ve } x \in B' \\ \Leftrightarrow x \in B' \text{ ve } x \notin A' \\ \Leftrightarrow x \in B' - A'$$

Küme Aileleri

I bir küme olsun. I kümesinin her bir $i \in I$ elemanı için bir A_i kümesi varsa bütün bu A_i kümelerinin topluluğu

olan $\{A_i : i \in I\}$ kümesine bir küme ailesi, I kümesine



Scanned with
CamScanner



UZOM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



15

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Dr. Öğr. Üyesi Abdullah DERTLİ

Soyut Matematik

Kümeler Cebiri

Ders 3