ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Dijital Ders Platformu

Altgruplar

Prof. Dr. Şenol EREN

Ders 10

3.2 Altgruplar

Tanım 3.2.1 $(G, *)$ bir grup ve H, G nin boşolmayan altkümesi olsun. Eğer H, Gdeki işleme göre kendi başına bir grup ise Hya Gnin altgrubu denir ve $H \leq G$ ile gösterilir.

$H \leq G$ ise Gnin birimi Hdadır. e, Gnin birimi olmak üzere G ve $\{e\}$ Gnin altgruplarıdır. Bunlara Gnin aşikar altgrupları denir.

Tanım 3.2.2 Bir grubun kendisi ve birimi dışındaki altgrublarına o grubun özaltgrupları denir.

Örnek 3.2.3 i) $(\{0\}, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$

ii) $(\{1\}, \cdot)$, $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$

i ve ii deki gruplar için her biri sağındaki grubun altgrubudur.

Not 3.2.4 Kolaylık olması amacıyla $(G, *)$ diye G yi alalım. $a, b \in G$ için $a*b$ yerine $a.b$ yi kullanalım.

Teorem 3.2.5 G bir grup ve $\emptyset \neq H \subseteq G$ olsun. H nin G nin altgrubu olması için gerek ve yeter şart

i) $\forall a, b \in H$ için $ab \in H$

ii) $\forall a \in H$ için $a^{-1} \in H$ olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ $H \leq G$ olsun. Açık

$(\Leftarrow)$ Verilen $\emptyset \neq H$ kümesi i-ii şartlarını sağlasın. Dolayısıyle ikili işlem ve G_3 özelliği sağlanır. G de tüm elemanlar için var olan birleşme özelliği H alt kümesindeki elemanlar içinde sağlanır. G_1 sağlanır. Bir $a \in H$ alalım. (ii) den $a^{-1} \in H$ ve (i) den $aa^{-1} = e \in H$ olup G_2 sağlanır. $H \leq G$ dir.

Teorem 3.2.6: G bir grup ve $\emptyset \neq H \subseteq G$ olsun. H'nın G'nin altgrubu olması için gerek ve yeter şart $\forall a,b \in H$ için $ab^{-1} \in H$ olmasıdır.

İspat: ($\Rightarrow$) $H \leq G$ ise açık.

($\Leftarrow$) $\forall a,b \in H$ için $ab^{-1} \in H$ olsun. $H \neq \emptyset$ olduğundan $\exists a \in H$ için $aa^{-1} = e \in H$ dır. $\forall b \in H$ için $b^{-1} = eb^{-1} \in H$ olup H'nın elemanlarının tersleri H'da mevcuttur. Böylece $\forall a,b \in H$ için $a, b^{-1} \in H$ olup $ab = a(b^{-1})^{-1} \in H$ dır. Dolayısıyla $H \leq G$ dir. (Teo. 3.2.5)

Teorem 3.2.7: G bir grup ve $\emptyset \neq H \subseteq G$ sonlu bir altkümesi olsun. H'nın G'nin altgrubu olması için gerek ve yeter şart $\forall a,b \in H$ için $a.b \in H$ olmasıdır.

İspat: ($\Rightarrow$) $H \leq G$ ise açık

($\Leftarrow$) $\phi \neq H$ sonlu ve $\forall a,b \in H$ için $a.b \in H$ olsun.
Teorem 3.2.5 in (i) şartı sağlandığından ii şartını sağlatalım. Bir $a \in H$ alalım. $a=e \Rightarrow a^{-1}=e \in H$ dır. $a \neq e$ olsun. H da işlem kapalı olduğundan a nın tüm pozitif kuvvetleri H dadır. H sonlu küme olduğundan $a, a^2, \ldots a^n, \ldots$ elemanlarının hepsi farklı olamaz. O halde $r>s>0$ pozitif tam sayıları için $a^r = a^s$ olur. $a^{r-s}=e$ ve $a \neq e$ kabul ettiğimizden $r-s>1$ yani $r-s-1>0$ olup $a^{r-s-1} = a^{-1} \in H$ bulunur.

Örnek 3.2.8 G değişmeli bir grup ve $H \leq G$ olsun. $K = \{x \in G \mid x^2 \in H\}$ kümesi G nin bir altgrubu mudur?

Teorem 3.2.9 G bir grup ve $M=\{b\in G \mid \forall a\in G \text{ için } ab=ba\}$ olsun. M, Gnin değişmeli bir altgrubudur. M altgrubuna Gnin merkezi denir.

İspat: $\forall a\in G$ için $ae=ea=a$ olduğundan $e\in M$, $M\neq\emptyset$
$a,b\in M$ olsun. Bu taktirde her $c\in G$ için
$ac=ca$ ve $bc=cb$ dir. Ayrıca $\forall c\in G$ için $bc=cb$ ise $cb^{-1}=b^{-1}c$ olduğundan $b^{-1}\in M$ dir. $\forall c\in G$ için
$(ab^{-1})c=a(b^{-1}c)=a(cb^{-1})=(ac)b^{-1}=(ca)b^{-1}=c(ab^{-1})$
olup $ab^{-1}\in M$ dolayısıyla $M\leq G$ dir.

TEŞEKKÜRLER…