ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Diferansiyel Denklemler I

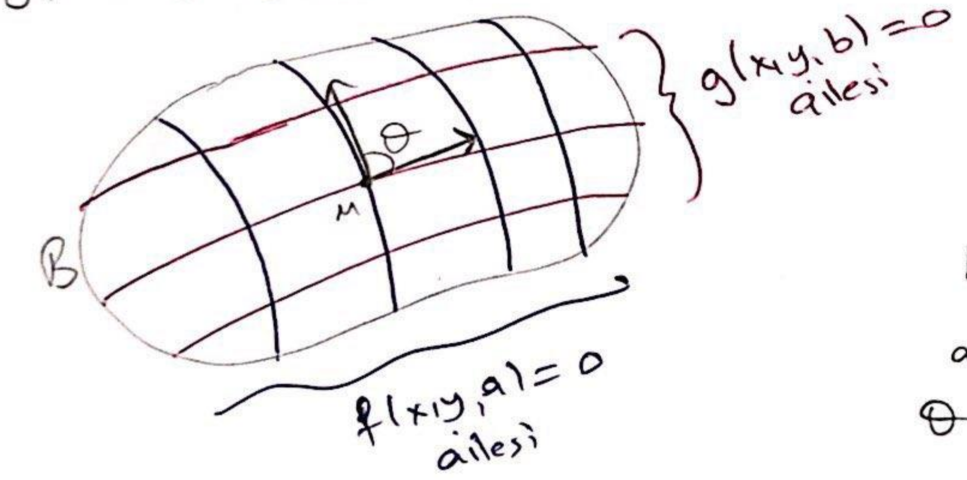
Dr.Öğr. Üyesi Fatma Hıra

Ders 9

3. Yörüngeler

xy düzleminin bir B bölgesinde tanımlı bir $f(x,y,a)=0$ eğri ailesi verilmiş olsun. B nin her bir noktasından f nin yalnız bir eğrisinin geçtiğini ve bu eğrilerin her bir noktasında teğetlerinin olduğunu varsayalım.

Şimdi B bölgesinde f nin tüm eğrilerini kesen ve f deki eğrilerle aynı özellikte olan eğrilerin oluşturduğu ikinci bir eğri ailesi $g(x,y,b)=0$ olsun.



Bilindiği üzere iki eğri arasındaki açı, bu eğrilerin kesiştiği noktadaki teğetleri arasındaki açıya denir. Şekildeki θ açısı f ve g eğrileri arasındaki açıyı gösterir.

Eğer g eğri ailesinin her eğrisi f eğri ailesinin her eğrisini sabit θ açısı altında kesiyorsa g eğri ailesine f nin **yörüngeleri** denir. (f ailesi de g nin yörüngeleri olur)

Eğer $\theta = 90°$ ise yörüngelere **dik yörüngeler**, $\theta \neq 90°$ ise yörüngelere **eğik yörüngeler** denir.

Amacımız verilen $f(x,y,a)=0$ eğri ailesinin dik ve eğik yörüngelerini bulmaktır.

Dik Yörüngeleri Bulma: $f(x,y,a)=0$ eğri ailesinin diferansiyel denklemi

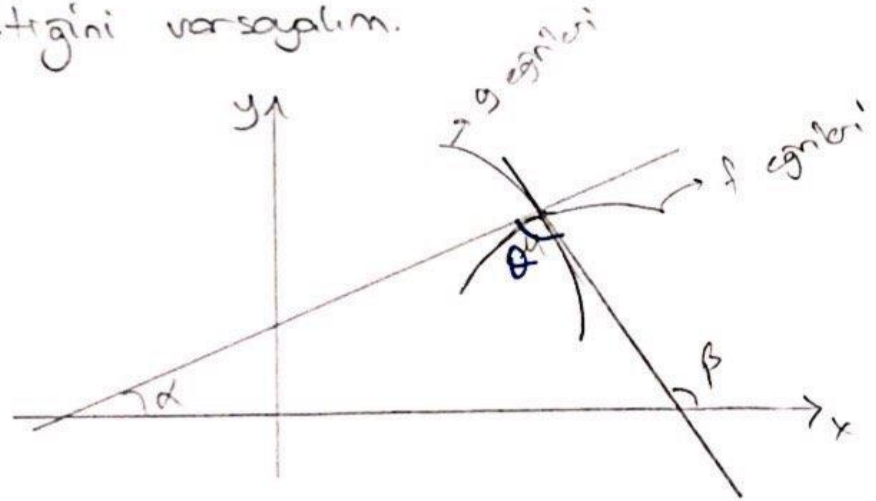
$$F(x,y,y') = 0 \quad --- \quad (3.1)$$

olsun. Burada y', f eğri ailesine ait ve bir M noktasından geçen eğrinin bu noktadaki teğetinin eğimidir. g deki eğriler f deki eğrilere dik olduğundan g deki eğrilerin aynı M noktasındaki teğetinin eğimi $\frac{-1}{y'}$ olur. Öyleyse (3.1) de y' yerine $\frac{-1}{y'}$ yazılarak elde edilen

$$F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0 \quad --- \quad (3.2)$$

diferansiyel denklemi dik yörüngelerin diferansiyel denklemi dur. (3.2) nin çözümü $f(x,y,a)=0$ eğri ailesinin dik yörüngelerini verir, bu da $g(x,y,b)=0$ şeklindedir.

Eğri Yörüngeleri Bulma: Denklemleri $f(x,y,a)=0$ olan f eğri ailesi ile θ açısı yapan bir g eğri ailesinin denklemini bulalım. f ve g ailelerinin herhangi iki eğrisinin kesiştiği nokta $M(x,y)$ dan. f ye ait eğrinin M noktasındaki teğeti x eksenini α açısı ile kessin. g eğri ailesine ait eğrinin M noktasındaki teğetinin x eksenini β açısı ile kestiğini varsayalım.



$$\alpha+\theta=\beta$$
$$\alpha=\beta-\theta$$

yazılır. Buradan

$$\tan\alpha=\tan(\beta-\theta)$$
$$\tan\alpha=\frac{\tan\beta-\tan\theta}{1+\tan\beta\cdot\tan\theta}$$

elde edilir. Türevin geometrik yorumundan

$\tan\alpha$, f ye ait eğrinin M deki teğetin eğimi olup $y_f'=\tan\alpha$

$\tan\beta$, g ye " " " " " " $y_g'=\tan\beta$

şeklindedir

O halde eğimler arasında

$$y_f' = \frac{y_g' - \tan\theta}{1 + y_g' \tan\theta}$$

bağıntısı elde edilir.

f eğri ailesinin diferansiyel denklemi $f(x,y,y_f')=0$ ise istenen g eğri ailesinin diferansiyel denklemi $f\left(x,y,\dfrac{y_g' - \tan\theta}{1+y_g'\tan\theta}\right)=0$ olur. Bu denklemin çözümü g eğri ailesi yani f eğri ailesinin eğik yörüngeleri dur.

➡ $f(x,y,a)=0$ eğri ailesinin θ açılı $g(x,y,b)=0$ eğik yörüngesini bulmak için $f(x,y,y')=0$ denkleminde

$\theta = 90°$ ise $y' \rightarrow -\dfrac{1}{y'}$ yazılır

$\theta \neq 90°$ ise $y' \rightarrow \dfrac{y' - \tan\theta}{1 + y'\tan\theta}$ yazılır

ve elde edilen denklemler çözülür.

Örnek: $x^2+y^2=c^2$ çemberler ailesinin dik yörüngelerini bulunuz.

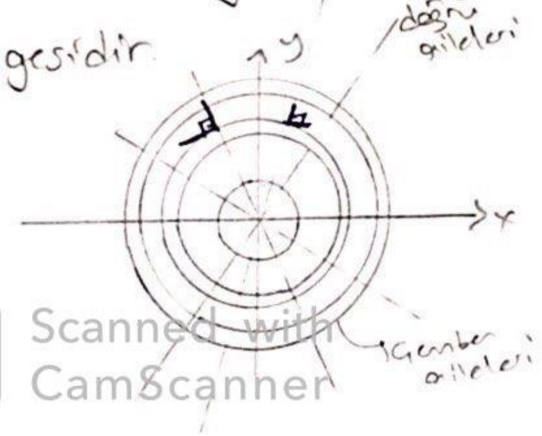
Önce çember ailesinin diferansiyel denklemini bulalım. Bir kez türev alırsak (kapalı fonksiyon türevinden)

$$2x+2yy'=0 \Rightarrow y'=\frac{-x}{y}$$ istenen diferansiyel denklemdir.

y' yerine $-\frac{1}{y'}$ yazarsak $-\frac{1}{y'}=-\frac{x}{y} \Rightarrow y'=\frac{y}{x}$ denklemi dik yörüngelerin denklemidir. Bunun çözümünden

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y}=\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y=\ln x+\ln b$$

$y=bx$ doğrular ailesi bulunur. Bu $y=bx$ doğrular ailesi $x^2+y^2=c^2$ çemberler ailesinin dik yörüngesidir.



→ $y=bx$ doğrular ailesinin dik yörüngeleri de $x^2+y^2=c^2$ çemberler ailesi olur.

Örnek: Merkezi y ekseni üzerinde ve yarıçapı, merkezin orjine uzaklığına eşit olan çemberler ailesinin dik yörünge ailesini bulunuz.

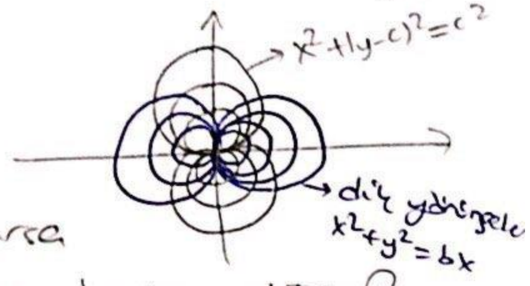
Bahsedilen çember ailesi $M(0,c)$, $r=c$ olmak üzere

$$x^2+(y-c)^2=c^2$$

şeklindedir. Yani $x^2+y^2-2yc=0$ dur. Bunun diferansiyel denklemi

$$2x+2yy'-2y'c=0 \Rightarrow c=\frac{x+yy'}{y'} \Rightarrow x^2+y^2-2y\cdot\left(\frac{x+yy'}{y'}\right)=0$$

$$\Rightarrow y'=\frac{2xy}{x^2-y^2} \quad \text{şeklindedir.}$$



Dik yörünge denklemi için $y' \to -\frac{1}{y'}$ yazılırsa

$$-\frac{1}{y'}=\frac{2xy}{x^2-y^2} \Rightarrow y'=\frac{y^2-x^2}{2xy}$$

denklemi elde edilir. Bu denklem homojen, Bernoulli ve tam hale gelebilen bir denklemdir.

Homojen denklem olarak; $y=ux$ ile $\frac{2u}{1+u^2}du=-\frac{dx}{x}$ olup $x^2+y^2=bx$ çözümü yani dik yörünge ailesi bulunur.

Bunlar $M(\frac{b}{2},0)$ $r=\frac{b}{2}$ olan çemberlerdir.

Örnek: $y^2=2(x-c)$ eğri ailesinin $45°$ lik yörüngesinin $(0,0)$dan geçen yörüngesini bulunuz.

Önce $y^2=2(x-c)$ eğri ailesinin denklemini bulalım.

$2yy'=2 \quad \Rightarrow \quad y'=\frac{1}{y}$ dur.

Eğik yörünge denklemi için $y' \longrightarrow \frac{y'-\tan\theta}{1+y'\tan\theta}=\frac{y'-1}{1+y'}$ yazılırsa

$\theta=45°$ için $\tan\theta=1$

$$\frac{y'-1}{1+y'}=\frac{1}{y} \Rightarrow yy'-y=1+y' \Rightarrow y'(y-1)=1+y$$

$$\Rightarrow y'=\frac{1+y}{y-1} \text{ şeklinde}$$

eğik yörünge denklemi elde edilir. Bu denklemin çözülmesiyle

$$\frac{y-1}{y+1}\,dy=dx \Rightarrow \int\left(\frac{y-1}{y+1}\right)dy=\int dx \Rightarrow \int\left(1-\frac{2}{y+1}\right)dy=\int dx$$

$$\Rightarrow y-2\ln(y+1)=x+\ln c \Rightarrow c(y+1)^2=e^{y-x}$$

eğik yörünge ailesi bulunur. $(0,0)$ dan geçeni

$x=0,\ y=0$ için $c=e^0=1 \Rightarrow (y+1)^2=e^{y-x}$ bulunur.

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Diferansiyel Denklemler I

Dr.Öğr. Üyesi Fatma Hıra

Ders 9