ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Temel Kavramlar

Prof. Dr. Şenol EREN

Ders 1

Bölüm 1

Temel Kavramlar

Bu bölümde bağıntı, fonksiyon ve tam sayıların bazı özellikleri ele alınacaktır. Kullanılacak bazı kümelerin gösterimleri aşağıdaki gibidir.

Doğal Sayılar kümesi: $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\ldots\}$.

Tam Sayılar kümesi: $\mathbb{Z}=\{\ldots -1,0,1,2,3,\ldots\}$

Sıfırdan farklı tam sayılar kümesi: $\mathbb{Z}^*$

Pozitif tam sayılar kümesi: $\mathbb{Z}^+=\{1,2,3,\ldots\}$

Negatif tam sayılar kümesi: $\mathbb{Z}^-=\{-1,-2,\ldots\}$

Çift tam sayılar kümesi: $2\mathbb{Z}=\{2n \mid n\in\mathbb{Z}\}=\{\ldots -2,0,2,\ldots\}$

Tek tam sayılar kümesi: $T=\{2n+1 \mid n\in\mathbb{Z}\}=\{\ldots -1,1,3,\ldots\}$

$\forall n\in\mathbb{Z}$ için $n\mathbb{Z}=\{nk \mid k\in\mathbb{Z}\}$

Rasyonel Sayılar kümesi: $\mathbb{Q}=\{\frac{a}{b} \mid a,b\in\mathbb{Z},\ b\neq 0\}$

İrrasyonel Sayılar kümesi: $\mathbb{I}$

Reel Sayılar kümesi: $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{I}$

Karmaşık (kompleks) Sayılar kümesi: $\mathbb{C}$

1.1 BAĞINTILAR

Bu kısımda bağıntı kavramı tanımlanacak ve denklik ve sıralama bağıntıları üzerinde durulacaktır.

Tanım 1.1.1 $n\geq 2$ bir tam sayı olmak üzere $A_1,\dots,A_n$ kümeleri verilsin. $A_1\times\dots\times A_n$ kartezyen çarpım kümesinin her bir R altkümesine $A_1,\dots,A_n$ üzerinde bir n-li bağıntı denir.

Ayrıca A ve B iki küme olmak üzere $R\subseteq A\times B$ ye A'dan B'ye bir bağıntı, özel olarak $R\subseteq A\times A$ ise R'ye A'da bir bağıntı denir.

Tanım 1.1.2 A ve B iki küme olmak üzere $R \subseteq A \times B$ olsun. $\{a \in A \mid (a,b) \in R$ olacak şekilde bir $b \in B$ vardır$\}$ kümesine R'nin tanım kümesi, $\{b \in B \mid (a,b) \in R$ olacak şekilde bir $a \in A$ vardır$\}$ kümesine R'nin görüntü kümesi denir. Eğer $(a,b) \in R$ ise a ile b bağlantılıdır denir ve aRb ile gösterilir.

Tanım 1.1.3 R bir A kümesi üzerinde tanımlı bir bağıntı olsun.

i) $\forall a \in A$ için aRa ise R ye yansıma özelliğine sahiptir,

ii) aRb şartını sağlayan her $a,b \in A$ için bRa ise R'ye simetri özelliğine sahiptir,

iii) aRb ve bRa şartını sağlayan her $a,b \in A$ için $a=b$ oluyorsa R'ye ters simetri özelliğine sahiptir,

iv) aRb ve bRc şartını sağlayan her $a,b,c \in A$ için aRc ise R'ye geçişme özelliğine sahiptir denir.

Tanım 1.1.4 Bir A kümesi üzerinde tanımlı bir R bağıntısı yansıma, simetri ve geçişme özelliklerine sahip ise o zaman R'ye A üzerinde bir denklik bağıntısı denir.

Tanım 1.1.5 R, A'da bir denklik bağıntısı olsun. bir $a \in A$ nın denklik sınıfı $\bar{a} = \{b \in A \mid bRa\}$ ile tanımlanır. Bütün denklik sınıflarının kümesi A/R ile gösterilir ve bölüm kümesi olarak adlandırılır.

Örnek 1.1.6: $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi üzerinde, farkları $n>0$ tam sayısı ile bölünebilen tam sayıları denk olarak tanımlarsak bu bir denklik bağıntısıdır, ayrıca $a \in \mathbb{Z}$ nin denklik sınıfı n'ye bölündüğünde a ile aynı kalanı bırakan tüm tam sayılardan oluşur. Bu denklik sınıflarının oluşturduğu küme $\mathbb{Z}_n$ ile gösterilir.

Önerme 1.1.7 R, A üzerinde bir denklik bağıntısı olsun $\forall a, b \in A$ için $aRb \Longleftrightarrow \bar{a} = \bar{b}$ dir.

Önerme 1.1.8 Bir denklik bağıntısının birbirinden farklı denklik sınıfları ikişer, ikişer ayrıktır.

Önerme 1.1.9 R, A üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Bu taktirde $A/_R$, A nın bir ayrışımıdır.

Tanım 1.1.8 Bir A kümesi üzerinde $\leq$ bağıntısı yansıyan, ters simetrik ve geçişmeli ise $\leq$ bağıntısına A üzerinde bir kısmı sıralama bağıntısı denir ve $(A, \leq)$ ikilisine bir kısmı sıralı küme (KSK) adı verilir.

Tanım 1.1.9 $(A, \leq)$ bir KSK olsun. Eğer $a, b \in A$ için $a \leq b$ veya $b \leq a$ ise a ve b elemanlarına kıyaslanabilir denir. Eğer A'nın her eleman çifti kıyaslanabilir ise $\leq$ bağıntısına tam sıralama bağıntısı denir ve $(A, \leq)$ ikilisine de tam sıralı küme adı verilir.

Tanım 1.1.10 $(A, \leq)$ bir KSK olsun. A'nın tam sıralı her altkümesine bir zincir adı verilir.

Tanım 1.1.11 $(A, \leq)$ bir KSK olsun.

i) $\forall a\, [a \in A \wedge m \leq a] \Rightarrow a = m$ ise, $m \in A$'ya A'nın bir maksimal elemanı denir ve $Mak(A)$ ile gösterilir.

ii) $\forall a\, [a \in A \wedge a \leq n] \Rightarrow a = n$ ise $n \in A$'ya A'nın minimal elemanı denir ve $Min(A)$ ile gösterilir.

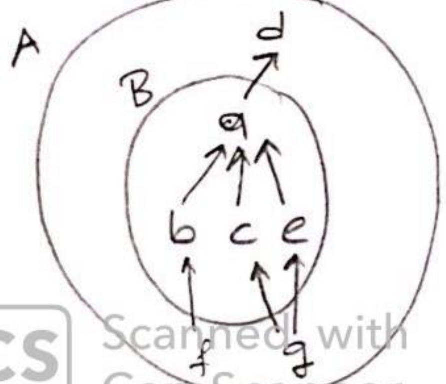
Tanım 1.1.12 $(A, \leq)$ bir KSK olsun.

i) $\forall a \in A$ için $a \leq m$ olacak şekilde bir $m \in A$ varsa m'ye A'nın en büyük elemanı denir ve $m = EBE(A)$ ile gösterilir.

ii) $\forall a \in A$ için $n \leq a$ olacak şekilde bir $n \in A$ varsa, n'ye A'nın en küçük elemanı denir ve $n = EKE(A)$ ile gösterilir.

Örnek 1.1.13 $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $B = \{a, b, c, e\}$ $x \leq y \Leftrightarrow x = y \vee x \to y$

$(A, \leq)$ ve $(B, \leq)$ bir KSK dır.



$Mak(A) = \{d\}$ $Min(A) = \{f, g\}$

$EBE(A) = d$ $EKE(A)$ yok

$Mak(B) = \{a\}$ $Min(B) = \{b, c, e\}$

$EBE(B) = a$ $EKE(B)$ yok

Tanım 1.1.14 $(A, \leq)$ bir KSK olsun. Eğer A'nın boştan farklı her alt kümesinin bir enküçük elemanı varsa $(A, \leq)$ ikilisine iyi sıralı küme denir.

Örnek 1.1.15 $(\mathbb{Z}^+, \leq)$ iyi sıralıdır.

Örnek 1.1.16 $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ kümesinde bölünebilme bağıntısına göre $Mak(A) = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ $Min(A) = \{2, 3, 5, 7\}$ dir.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Cebir I

Prof. Dr. Şenol EREN

Ders 1