ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Diferansiyel Denklemler I

Dr.Öğr. Üyesi Fatma Hıra

Ders 4

③ Değişkenlerine Ayrılabilen veya Homojen Hale İndirgenebilen Diferansiyel Denklemler

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) \qquad a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \text{ sabit}$$

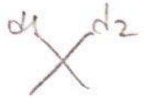
formundaki denklemler $c_1=c_2=0$ ise homojendir. Eğer bu sabitlerden en az biri sıfırdan farklı ise homojenlik bozulur ve denklem uygun dönüşümlerle homojen denkleme ya da değişkenlerine ayrılabilen denkleme indirgenir.

$d_1 \ldots\ a_1x+b_1y+c_1=0 \quad , \quad d_2 \ldots\ a_2x+b_2y+c_2=0$

i) $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} = \lambda$ ise d_1 ile d_2 çakışık doğrular

ii) $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$ ise d_1 ile d_2 paralel doğrular

iii) $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$ ise d_1 ile d_2 bir noktada kesişir.



(i) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \lambda$ ise

$a_1 = \lambda a_2$, $b_1 = \lambda b_2$, $c_1 = \lambda c_2$ olup

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) = f\left(\frac{\lambda a_2x+\lambda b_2y+\lambda c_2}{a_2x+b_2y+c_2}\right) = f(\lambda)$$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(\lambda)$ dur Bu denklemin de çözümü

$y = f(\lambda)x + c$ şeklindedir.

(ii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ ise (veya $a_1b_2 - b_1a_2 = 0$ ise)

$a_1 = \lambda a_2$, $b_1 = \lambda b_2$ olup $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{\lambda(a_2x+b_2y)+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ dur.

$u = a_2x+b_2y$ dönüşümü yapılırsa $u' = a_2 + b_2y' \Rightarrow y' = \frac{u'-a_2}{b_2}$

elde edilir.

$$\frac{du}{b_2 f\left(\frac{\lambda u+c_1}{u+c_2}\right)+a_2} = dx$$ değişkenlerine ayrılabilen denkleme indirgenir.

Böylece denklem

$$\frac{u'-a_2}{b_2} = f\left(\frac{\lambda u + c_1}{u + c_2}\right) \Rightarrow \frac{du}{b_2 f\left(\frac{\lambda u + c_1}{u + c_2}\right) + a_2} = dx$$

şeklinde değişkenlerine ayrılabilen denkleme indirgenir. İntegral alınıp u yerine $u = a_2 x + b_2 y$ yazılırsa denklemin genel çözümü bulunur.

(iii) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ ise (veya $a_1 b_2 - b_1 a_2 \neq 0$ ise)

(h,k) değerleri $\left.\begin{array}{l} a_1 h + b_1 k + c_1 = 0 \\ a_2 h + b_2 k + c_2 = 0 \end{array}\right\}$ denklem sisteminin

çözümü olmak üzere $\left.\begin{array}{l} x = u + h \\ y = v + k \end{array}\right\}$ dönüşümü uygulanırsa $dx = du$, $dy = dv$

için $\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$ olup denklem $\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1 u + b_1 v}{a_2 u + b_2 v}\right)$ şeklinde

u ve v ye bağlı homojen denkleme indirgenir. Bu homojen denklemin çözümü için de

$$v = tu$$

dönüşümü yapılarak denklem değişkenlerine ayrılabilen denkleme indirgenip integral alınarak çözüm bulunur. Bulunan çözümde

$$t = \frac{v}{u}, \quad u = x-h, \quad v = y-k$$

ifadeleri yerine yazılarak denklemin genel çözümü bulunmuş dur.

Örnek: $y' = \frac{y+1}{x} + 2$ denkleminin çözümünü bulunuz.

$y' = \frac{2x+y+1}{x}$ şeklinde olup değişkenlerine ayrılabilir veya homojen denklem değildir.

$a_1 = 2 \quad b_1 = 1 \quad c_1 = 1 \quad , \quad a_2 = 1, \; b_2 = 0, \; c_2 = 0$ olup

$a_1 b_2 - b_1 a_2 = 2.0 - 1.1 = -1 \neq 0$ olduğu için $\left.\begin{aligned} x &= u+h \\ y &= v+k \end{aligned}\right\}$

dönüşümü ile denklem homojen denkleme indirgenebilir. (h,k) değerleri $\left.\begin{aligned} 2h+k+1 &= 0 \\ h &= 0 \end{aligned}\right\}$ sisteminin çözümleri olduğu için önce

bunları bulalım. $h = 0$ için $k = -1$ olup $(h,k) = (0,-1)$ olur.

O halde

$\left.\begin{aligned} x &= u \\ y &= v-1 \end{aligned}\right\}$ dönüşümü yaparsak $\begin{aligned} dx &= du \\ dy &= dv \end{aligned} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$ olur.

$$\frac{dv}{du} = \frac{2u + v - 1 + 1}{u}$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{2u + v}{u}$$ homojen denklemi elde edilir

$v = tu$ dönüşümü yaparsak $v' = t'u + t$ olup

$$t'u + t = \frac{\overset{\cancel{u}(2+t)}{2u + tu}}{\cancel{u}}$$

$$t'u + t = 2 + t$$

$$t'u = 2$$

$$\frac{dt}{du} u = 2 \Rightarrow dt = 2\frac{du}{u} \Rightarrow t = 2\ln|u| + c$$

$$\Rightarrow \frac{v}{u} = 2\ln|u| + c$$

$$\left.\begin{array}{l} x = u \\ y = v - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} u = x \\ v = y + 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{y+1}{x} = 2 \cdot \ln|x| + c}_{\text{genel çözüm}}$$

Örnek: $(x-y+1)\,dx-(2x-2y+1)\,dy=0$ denkleminin çözümünü bulunuz.

Değişkenlerine ayrılabilen veya homojen denklem değildir.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-y+1}{2x-2y+1} \qquad \left.\begin{matrix} a_1=1 & b_1=-1 & c_1=1 \\ a_2=2 & b_2=-2 & c_2=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a_1b_2-b_1a_2=-2-(-2)=0$$

olduğundan ortak olan ifadeye u diyeliyiz

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-y+1}{2(x-y)+1}$$ olduğundan $u=x-y$ dönüşümü yapalım

$u=x-y \Rightarrow u'=1-y' \Rightarrow y'=1-u'$ olur.

$$1-u'=\frac{u+1}{2u+1} \Rightarrow u'=1-\frac{u+1}{2u+1} \Rightarrow u'=\frac{u}{2u+1}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{u}{2u+1} \Rightarrow \frac{2u+1}{u}\,du=dx$$

değişkenlerine ayrılabilen denkleme indirgenir. Her iki tarafın integrali alınırsa

$$\int \frac{2u+1}{u}\,du = \int dx$$

$$\int \left(2+\frac{1}{u}\right)du = \int dx$$

$2u + \ln|u| = x + c$ bulunur.

$u = x - y$ olduğundan yerine yazılırsa

$2(x-y) + \ln|x-y| = x + c$ genel çözümü elde edilir.

Genel çözüm

$\ln|x-y| = 2y - x + c_1 \Rightarrow x - y = e^{2y-x+c_1}$, $e^{c_1} = c$

$\Rightarrow x - y = c\,e^{2y-x}$

şeklinde de yazılabilir.

Örnek: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x+y+1}$ denkleminin çözümünü bulunuz.

$a_1=0, b_1=0, c_1=1$; $a_2=1, b_2=1, c_2=1$ olup $a_1b_2 - b_1a_2 = 0$ olduğundan uygun bir ifadeye u demeliyiz.

$u = a_2x + b_2y \Rightarrow u = x+y$ dönüşümü yapalım.

$u' = 1 + y' \Rightarrow y' = u' - 1$

$$u' - 1 = \frac{1}{u+1} \Rightarrow u' = \frac{1}{u+1} + 1 \Rightarrow u' = \frac{u+2}{u+1}$$

$$\Rightarrow \frac{u+1}{u+2}\,du = dx$$ değişkenlerine ayrılabilen denkleme indirgenir

$$\Rightarrow \int \left(\frac{u+1}{u+2}\right) du = \int dx$$

$$\Rightarrow \int \left(1 - \frac{1}{u+2}\right) du = \int dx$$

$$\Rightarrow u - \ln|u+2| = x + c$$

$u = x+y$ için $\Rightarrow y - \ln|x+y+2| = c \Rightarrow \underline{x+y+2 = c\,e^{y}}$ genel çözüm

Örnek: $y' = \tan^2(x+y)$ denkleminin çözümünü bulunuz.

$u = x+y$ dönüşümü yaparsak $u' = 1+y' \Rightarrow y' = u'-1$ dur.

$u'-1 = \tan^2 u$

$u' = 1+\tan^2 u$

$u' = \sec^2 u$

$\dfrac{du}{\sec^2 u} = dx$

$\cos^2 u \, du = dx$ değişkenlerine ayrılabilir denk.

$\int \cos^2 u \, du = \int dx$

$\int \left(\dfrac{1+\cos 2u}{2}\right) du = \int dx$

$\dfrac{1}{2}u + \dfrac{1}{4}\sin 2u = x + c \Rightarrow 2u + \sin 2u = 4x + c$

$u = x+y$ için $2(x+y) + \sin 2(x+y) = 4x+c$

$\Rightarrow 2y - 2x + \sin 2(x+y) = c$

genel çözüm

Örnek: $(2x+3y)dx+(y+2)dy=0$ denkleminin çözümünü bulunuz.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2x-3y}{y+2} \qquad \left.\begin{matrix} a_1=-2, & b_1=-3, & c_1=0 \\ a_2=0, & b_2=1, & c_2=2 \end{matrix}\right\} \quad a_1b_2-b_1a_2=-2\neq 0 \text{ dır.}$$

$$\left.\begin{matrix} -2h-3k=0 \\ k+2=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} h=3 \\ k=-2 \end{matrix} \text{ olup} \qquad \left.\begin{matrix} x=u+3 \\ y=v-2 \end{matrix}\right\} \text{ dönüşümü yaparsak}$$

$\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{du}$ olacağından verilen denklem

$$\frac{dv}{du}=\frac{-2(u+3)-3(v-2)}{v-2+2}$$

$$\frac{dv}{du}=\frac{-2u-3v}{v}$$ homojen denklemine indirgenir.

$v=ut$ dönüşümü yaparsak ($t=t(u)$ şeklindedir) $v'=t'u+t$

olup

$$t'u+t=\frac{-2\cancel{u}-3\cancel{u}t}{\cancel{u}t} \Rightarrow t'u+t=-\frac{2-3t}{t} \Rightarrow t'u=\frac{-2-3t-t^2}{t}$$

$$\Rightarrow \frac{t}{2+3t+t^2}\,dt=-\frac{du}{u}$$ değişkenlerine ayrılabilir denkleme indirgenir.

$$\int \frac{t}{t^2+3t+2}\,dt = -\int \frac{du}{u}$$ //

$$\frac{t}{t^2+3t+2} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{t+1}$$

$$\int\left(\frac{2}{t+2} - \frac{1}{t+1}\right)dt = -\int \frac{du}{u}$$

$$t = A(t+1) + B(t+2)$$

$t=-1$ için $-1 = B \Rightarrow B=-1$

$t=-2$ için $-2 = -A \Rightarrow A = 2$

$$\frac{t}{t^2+3t+2} = \frac{2}{t+2} - \frac{1}{t+1}$$ olur. //

$$2\ln|t+2| - \ln|t+1| = -\ln|u| + \ln|c|$$

$$\ln\frac{(t+2)^2}{t+1} + \ln|u| = \ln|c|$$

$$u\,\frac{(t+2)^2}{t+1} = c$$

$t = \frac{v}{u}$ ve $u = x-3$, $v = y+2$ yazılırsa

$$(x-3)\left(\frac{\left(\frac{y+2}{x-3}+2\right)^2}{\frac{y+2}{x-3}+1}\right) = c \Rightarrow (2x+y-4)^2 = c(x+y-1)$$

genel çözümü bulunur.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Diferansiyel Denklemler I

Dr.Öğr. Üyesi Fatma Hıra

Ders 4