ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Diferansiyel Denklemler I

Dr.Öğr. Üyesi Fatma Hıra

Ders 3

2. Birinci Mertebe ve Birinci Dereceden Diferansiyel Denklemler ve Çözüm Yöntemleri

Birinci mertebeden bir diferansiyel denklem $F(x,y,y')=0$ formunda yazılıyordu. Bu tip denklemlerin yalnız birinci dereceden olanlarının

$f(x,y,c)=0 \Rightarrow$ kapalı formda

veya $y=\phi(x,c) \Rightarrow$ açık formda

genel çözümlerini elde etme yöntemleri verilecektir.

Bu tip denklemler

$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ veya $\frac{dx}{dy}=h(x,y) \Rightarrow$ türev formunda

$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \Rightarrow$ diferansiyel formda

şeklinde de ifade edilebilir.

1 Değişkenlerine Ayrılabilen Diferansiyel Denklemler

$y' = f(x,y)$ şeklindeki diferansiyel denklem

$$h_1(x)g_1(y)dx + h_2(x)g_2(y)dy = 0$$

veya

$$\frac{dy}{dx} = h(x)g(y)$$

olarak yazılabiliyorsa böyle bir denkleme değişkenlerine ayrılabilen diferansiyel denklem denir.

Bu denklemin çözümü

$$\frac{dy}{dx} = h(x)g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = h(x)dx$$ yazılıp integral alınırsa

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x)dx + c \Rightarrow G(y) + H(x) = c$$

olarak bulunur.

→ Her integral için ayrı sabit almaya gerek yoktur.

Örnek: $y' = \frac{y-1}{1-2x}$ denkleminin çözümünü bulunuz.

$y' = \frac{1}{1-2x} \cdot (y-1)$ olup $y' = h(x)\,g(y)$ şeklinde bir değişkenlerine ayrılabilen denklemdir.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-2x}(y-1)$$

$$\underbrace{\frac{dy}{y-1}}_{\text{sadece } y \text{ ye bağlı}} = \underbrace{\frac{dx}{1-2x}}_{\text{sadece } x \text{ e bağlı}}$$

Her iki tarafın integrali alınırsa $\int \frac{dy}{y-1} = \int \frac{dx}{1-2x}$

$$\Rightarrow \ln|y-1| = -\frac{1}{2}\ln|1-2x| + \ln|c|$$

$$\Rightarrow (y-1)\sqrt{1-2x} = c$$

genel çözümü bulunur.

⊛ $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln f(x) + c$

Örnek: $y' = \sqrt{\dfrac{y}{x}}$ denkleminin çözümünü bulunuz.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{dx}{\sqrt{x}}$$ olup değişkenlerine ayrılabilen dif denktir.

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \int y^{-1/2}\, dy = \int x^{-1/2}\, dx$$

$$\Rightarrow \frac{y^{-1/2+1}}{1/2} = \frac{x^{-1/2+1}}{1/2} + c$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{y} = 2\sqrt{x} + c$$ genel çözümü bulunur.

$\sqrt{y} - \sqrt{x} = c_1$, $c_1 = \frac{c}{2}$ olarak da yazılabilir.

Örnek: $(xy^2-2y^2)\,dx + (x^2y-2x^2)\,dy = 0$ denkleminin çözümünü bulunuz

Denklemi düzenlersek

$y^2(x-2)\,dx + x^2(y-2)\,dy = 0$ olur. Her iki taraf $\dfrac{1}{x^2y^2}$ ile çarpılırsa

$$\frac{x-2}{x^2}\,dx + \frac{y-2}{y^2}\,dy = 0$$ şeklinde değişkenlerine ayrılabilen dif denk elde edilir.

$$\int \left(\frac{x-2}{x^2}\right) dx = \int \frac{2-y}{y^2}\,dy$$

$$\Rightarrow \int \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) dx = \int \left(\frac{2}{y^2} - \frac{1}{y}\right) dy$$

$$\Rightarrow \ln|x| + \frac{2}{x} = -\frac{2}{y} - \ln|y| + C$$ genel çözümü bulunur.

Örnek: $xe^{x^2-y^2}dx + y\,dy = 0$, $y(0)=0$ başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz.

$$xe^{x^2-y^2}dx + y\,dy = 0$$

$$e^{y^2} \,/\; xe^{x^2}e^{-y^2}dx + y\,dy = 0$$

$$xe^{x^2}dx + ye^{y^2}dy = 0$$

$$\int xe^{x^2}dx + \int ye^{y^2}dy = \int d(c)$$

$$\frac{1}{2}e^{x^2} + \frac{1}{2}e^{y^2} = c$$

$\underline{e^{x^2} + e^{y^2} = 2c}$ genel çözümdür.

$y(0)=0$ koşulu için $x=0$ için $y=0 \Rightarrow e^0 + e^0 = 2c$

$$\Rightarrow 2 = 2c$$

$$\Rightarrow c = 1$$

$\Rightarrow \underline{e^{x^2} + e^{y^2} = 2}$ istenen özel çözüm

Örnek! $y' \sin y = \sin^2 x$ denklemini çözünüz.

$$\frac{dy}{dx} \sin y = \sin^2 x$$

$$\sin y \, dy = \sin^2 x \, dx$$

$$\int \sin y \, dy = \int \sin^2 x \, dx$$

$$\int \sin y \, dy = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2} \right) dx$$

$$-\cos y = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + c$$

$$\underbrace{\cos^2 x}_{1-\sin^2 x} - \sin^2 x = \cos 2x$$

$$1 - 2\sin^2 x = \cos 2x$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$\sin 2x - 4\cos y = 2x + c$ genel çözümdür.

Örnek! $y' + 2xy = -xy^2$ denklemini çözünüz

$$\frac{dy}{dx} = -x(y^2+2y)$$

$$\frac{dy}{y^2+2y} = -x\,dx$$ değişkenlerine ayrılabilen denklem

$$\int \frac{dy}{y^2+2y} = \int -x\,dx$$

$$\int \left(\frac{1}{2y} - \frac{1}{2}\frac{1}{y+2}\right) dy = \int -x\,dx$$

$$\frac{1}{2}\ln|y| - \frac{1}{2}\ln|y+2| = -\frac{x^2}{2} + c$$

$$\ln\left|\frac{y}{y+2}\right| = -x^2 + c$$

$$y = c(y+2)e^{-x^2}$$

genel çözüm

② Homojen Diferansiyel Denklemler

Tanım: Bir $f(x,y)$ fonksiyonunda x yerine xt, y yerine yt konulduğunda

$$f(xt,yt) = t^n f(x,t) \quad , \quad n \in \mathbb{R}$$

oluyorsa fonksiyona **n. dereceden homojendir** denir.

Not: f, $\frac{y}{x}$ in veya $\frac{x}{y}$ nin bir fonksiyonu ise $f\left(\frac{yt}{xt}\right) = t^0 f\left(\frac{y}{x}\right)$

veya $f\left(\frac{xt}{yt}\right) = t^0 f\left(\frac{x}{t}\right)$ olacağından fonksiyon **sıfırıncı dereceden homojendir.**

Örnek! $f(x,y) = \sqrt{x^3+y^3}$ için

$$f(xt,yt) = \sqrt{(xt)^3+(yt)^3} = \sqrt{t^3(x^3+y^3)} = t^{3/2}\sqrt{x^3+y^3} = t^{3/2} f(x,y)$$

$\Rightarrow$ fonksiyon $3/2$. dereceden homojendir.

Örnek! $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y^2} + \tan\dfrac{x}{y} + \ln\left(\dfrac{2x}{y} + 1\right)$ için

$$f(xt, yt) = \frac{(xt)^2}{(yt)^2} + \tan\frac{xt}{yt} + \ln\left(\frac{2xt}{yt} + 1\right)$$

$$= \frac{x^2}{y^2} + \tan\frac{x}{y} + \ln\left(\frac{2x}{y} + 1\right)$$

$$= f(x,y)$$

$\Rightarrow$ fonksiyon sıfırıncı dereceden homojendir.

Not: Homojen fonksiyonlarda her terimin toplam derecesi aynı olmalıdır.

- $f(x,y) = \underbrace{6xy^3}_{\text{derece } 4} - \underbrace{x^2y^2}_{\text{derece } 4}$ $\Rightarrow$ fonksiyon 4. dereceden homojen

Gerçekten

$$
\begin{aligned}
f(xt,yt) &= 6(xt)(yt)^3 - (xt)^2(yt)^2 \\
&= 6xy^3t^4 - x^2y^2t^4 \\
&= t^4\{6xy^3 - x^2y^2\} \\
&= t^4 f(x,y)
\end{aligned}
$$

- $f(x,y) = \underbrace{x^2}_{\text{derece } 2} - \underbrace{y}_{\text{derece } 1}$ $\Rightarrow$ dereceleri farklı olduğundan homojen değildir.

Tanım: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ diferansiyel denkleminde eğer $M(x,y)$ ve $N(x,y)$ fonksiyonlarının her ikisi de aynı dereceden homojen ise veya

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

denklemi için $f(x,y)$ sıfırıncı dereceden homojen ise diferansiyel denkleme homojendir denir.

Örnek: $\underbrace{(\underset{2}{x^2} - 3\underset{2}{y^2})}_{2.\text{derece}} dx + 2\underbrace{\underset{1+1}{xy}}_{2.\text{derece}} dy = 0$

aynı dereceden olduğu için denklem homojendir.

veya

$$(x^2-3y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$$ için

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2-x^2}{2xy}$$

$$f(x,y) = \frac{3y^2-x^2}{2xy}$$ olmak üzere

$$f(xt,yt) = \frac{3(yt)^2-(xt)^2}{2xtyt} = \frac{\cancel{t^2}(3y^2-x^2)}{\cancel{t^2}(2xy)}$$

$$= \frac{3y^2-x^2}{2xy} = f(x,y)$$

olup $f(x,y)$ sıfırıncı dereceden homojen olacağından denklem homojen denklemdir

Teorem: $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ denklemi homojen ise $y = ux$ veya $x = uy$ değişken değişimi ile değişkenlerine ayrılabilir bir diferansiyel denkleme dönüşür. Burada u ve v yeni bağımlı değişkenlerdir. ($u = u(x)$, $v = v(x)$ şeklinde)

İspat: $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ homojen ise $\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right)$ formunda veya $\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{x}{y}\right)$ formunda yazılabilir.

$y = ux$ için $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$ olup denklemde yazılırsa

$$u + x\frac{du}{dx} = g(u) \Rightarrow x\frac{du}{dx} = g(u) - u$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{du}{u - g(u)}$$ değişkenlerine

ayrılabilen denklem elde edilir.

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{u-g(u)}$$

$$\Rightarrow \ln|x| = F(u) + C$$

şeklinde olup $u = \frac{y}{x}$ yazılırsa genel çözüm

$$\ln|x| = F\left(\frac{y}{x}\right) + c$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde $x = vy$ değişken dönüşümü ile de denklemin değişkenlere ayrılabilir denkleme indirgendiği gösterilir.

➡ Denklemdeki $M(x,y)$ ve $N(x,y)$ fonksiyonları

$\frac{y}{x}$ ye bağlı ise $y = ux$ \
$\frac{x}{y}$ ye bağlı ise $x = vy$ } dönüşümü yapmak daha uygundur.

Örnek! $y' = \dfrac{x-y}{x+y}$ denkleminin çözümünü bulunuz.

$$y' = \frac{x\left(1-\frac{y}{x}\right)}{x\left(1+\frac{y}{x}\right)} \Rightarrow y' = \frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$$ olup $\frac{y}{x}$ formunda

olduğundan denklem homojendir.

$y = ux$ dersek $y' = u'x + u$ olur.

$$u'x + u = \frac{1-u}{1+u} \Rightarrow u'x = \frac{1-u}{1+u} - u$$

$$\Rightarrow u'x = \frac{1-2u-u^2}{1+u}$$

$$\Rightarrow \frac{1+u}{1-2u-u^2}\,du = \frac{dx}{x}$$ değişkenlerine ayrılabilir denk

$$\int \frac{1+u}{1-2u-u^2}\,du = \int \frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{-2(1+u)}{1-2u-u^2}\,du = \int \frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{2}\ln|1-2u-u^2| = \ln|x| + \ln c$$

$$(1-2u-u^2)^{-1/2} = cx$$

$y = ux \Rightarrow u = \frac{y}{x}$ yazılırsa

$\left(1 - 2\frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}\right)^{-1/2} = cx$ genel çözümdür.

Örnek! $\underbrace{xy}_{\text{2. derece}}\,dx - \underbrace{(x^2+y^2)}_{\text{2. derece}}\,dy = 0$ denklemini çözünüz.

dx ve dy nin katsayıları aynı dereceden olduğundan denklem homojendir veya

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{x^2\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)} = \frac{\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$ olup homojendir

$y = ux$ dersek $y' = u'x + u$ dur.

$$u'x + u = \frac{u}{1+u^2} \Rightarrow u'x = \frac{u}{1+u^2} - u$$

$$\Rightarrow u'x = -\frac{u^3}{1+u^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1+u^2}{u^3}\,du = -\frac{dx}{x}$$ değişkenlerine ayrılabilen denklem

$$\int \frac{1+u^2}{u^3}\,du = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\int \left(\frac{1}{u^3} + \frac{1}{u} \right) du = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{u^{-2}}{-2} + \ln|u| = -\ln|x| + c$$

$$\ln|ux| = \frac{1}{2u^2} + c$$

$y = ux \Rightarrow u = \frac{y}{x}$ yerine yazılırsa

$$\ln\left|\frac{y}{x}x\right| = \frac{1}{2\left(\frac{y}{x}\right)^2} + c$$

$y = c \cdot e^{\frac{x^2}{2y^2}}$ genel çözümü bulunur.

Örnek! $(1+2e^{x/y})\,dx + 2e^{x/y}(1-xy^{-1})\,dy = 0$ denklemini çözünüz.

Denklem $\frac{x}{y}$ formunda olduğundan $x = vy$ dönüşümü yapalım.

$x = vy \Rightarrow x' = v'y + v$ olur. (x bağımlı, y bağımsız $x = x(y)$ şeklinde)

$$\frac{dx}{dy} = \frac{(xy^{-1}-1)\,2e^{x/y}}{1+2e^{x/y}}$$

$$v'y + v = \frac{(v-1)\,2e^{v}}{1+2e^{v}}$$

$$v'y = -\frac{v+2e^{v}}{1+2e^{v}}$$

$$\frac{1+2e^{v}}{v+2e^{v}}\,dv = -\frac{dy}{y}$$ değişkenlerine ayrılabilir denklem

$$\int \frac{1+2e^{v}}{v+2e^{v}}\,dv = -\int \frac{dy}{y}$$

$$\ln|v+2e^{v}| = -\ln|y| + \ln c$$

$y(v+2e^{v}) = c$ dur.

$x = vy \Rightarrow v = \frac{x}{y}$ yazılırsa

$y\left(\frac{x}{y} + 2e^{\frac{x}{y}}\right) = c$ genel çözümü bulunur.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Diferansiyel Denklemler I

Dr.Öğr. Üyesi Fatma Hıra

Ders 3