



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



1

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Diferansiyel Denklemler I

Dr.Öğr. Üyesi Fatma Hıra

Ders 2

İlkelden Diferansiyel Denklemlerin Etkle Edilmesi

→ Bu kısımda, bir veya daha çok sabit içeren bir bağıntıdan keyfi sabitlerin yok edilmesiyle bir diferansiyel denklemin nasıl etkle edileceğini inceleyeceğiz.

c keyfi bir sabit (parametre) olmak üzere

$$f(x, y, c) = 0 \quad \dots (1.2)$$

Farklı bir parametreye bağlı eğri ailesi verilmiş olsun. Bu eğri ailesinin diferansiyel denklemini etkle etmek için (1.2) ifadesinin x 'e göre türevini alalım:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y' = 0 \quad \dots (1.3)$$

$$f(x, y, c) = 0$$

/ \

x y

\ /

y x

etkle edilir. Eğer (1.3) ifadesinde c keyfi sabiti yoksa aranan denklemin (1.3) ifadesidir. Eğer (1.3) ifadesi c keyfi sabitini içerirse (1.2) ve (1.3) bağıntıları arasında c yok edilir.



başımın birinci mertebeden bir diferansiyel denklemin etkle edilir.

c_1 ve c_2 birbirinden bağımsız iki keyfi sabit olmak üzere

$$f(x, y, c_1, c_2) = 0 \quad \dots (1.4)$$

şeklinde iki parametreye bağlı eğri ailesi verilmiş olsun. Bu eğri ailesinin diferansiyel denklemini bulmak için (1.4) ifadesinin x 'e göre iki kez türevini alalım:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y' = 0 \quad \dots (1.5)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y'' = 0 \quad \dots (1.6)$$

elde edilir. (1.4), (1.5) ve (1.6) bağıntıları arasında c_1 ve c_2 keyfi sabitleri yok edilerek ikinci mertebeden

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

diferansiyel denklemini elde edilir. Eğer (1.6) denkleminde keyfi sabit yoksa oranın denklem (1.6) denklemini olur.

Benzer şekilde a, c_2, \dots, c_n birbirinden bağımsız n tane keyfi sabit olmak üzere

$$f(x, y, a, c_2, \dots, c_n) = 0$$

şeklinde eğri ailesine karşılık gelen diferansiyel denklem bu ifade ile, bu ifadenin x' e göre n kez türevinin alınması ile elde edilen ifadeler arasında a, c_2, \dots, c_n keyfi sabitlerinin yok edilmesiyle

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

şeklinde n . mertebeden bir diferansiyel denklem olarak elde edilir.

→ a, c_2, \dots, c_n gibi n tane birbirinden bağımsız keyfi sabite bağlı diferansiyel denklem n . mertebededir.

→ Birbirinden bağımsız keyfi sabit sayısı kadar türev alınmaz denklem elde edilmeye başlanır.

Örnek: $y = c_1 e^x + c_2$ eğri ailesine karşılık gelen diferansiyel denklemi bulunuz.

c_1 ve c_2 şeklinde iki bağımsız sabit olduğundan x e göre iki kez türev alırsak

$$\left. \begin{array}{l} y' = c_1 e^x \\ y'' = c_1 e^x \end{array} \right\} \Rightarrow y' = y'' \Rightarrow y'' - y' = 0 \text{ elde edilir.}$$

2. mertebeden dif denk

Örnek: $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3$ eğri ailesinin diferansiyel denklemini bulunuz.

c_1, c_2, c_3 şeklinde üç bağımsız sabit olduğundan x e göre üç kez türev alırsak

$$\left. \begin{array}{l} y' = -c_1 \sin x + c_2 \cos x \\ y'' = -c_1 \cos x - c_2 \sin x \\ y''' = c_1 \sin x - c_2 \cos x \end{array} \right\} y' = -y''' \Rightarrow y' + y''' = 0 \text{ elde edilir.}$$

3. mertebeden dif denk



Özet: $y = c_1 e^{x+c_2}$ çember ailesinin diferansiyel denklemini bulunuz.

c_1 ve c_2 eklemlinde iki sabit var dmasına rağmen aslında bunlar lineer bağımlıdır. Yani

$$y = c_1 e^{x+c_2} = \underbrace{c_1 e^x}_{\text{sabit}} \cdot \underbrace{e^{c_2}}_{\text{sabit}} = c e^x \quad c = c_1 e^{c_2}$$

şeklinde tek sabit vardır. O halde bir kez türev alırsak

$$y = c e^x \Rightarrow y' = c e^x \Rightarrow y = y' \text{ denklemi elde edilir.}$$

Özet: Merkezi $(1, -1)$ olan çember ailesinin diferansiyel denklemini bulunuz.

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = c^2 \quad \text{çember ailesidir.}$$

Her sabit olduğu için bir kez türev alırsak (kapalı fonksiyon türevine göre)



Scanned with
CamScanner

$$2(x-1) + 2(y+1)y' = 0 \Rightarrow (x-1) + (y+1)y' = 0 \text{ bulunur.}$$

Özet: 1 yarıçaplı çember ailesinin diferansiyel denklemini bulunuz.
 Çemberin merkezi $M(a, c_2)$ olmak üzere 1 yarıçaplı çember ailesi

$$(x-a)^2 + (y-c_2)^2 = 1$$

şeklinde dir. İki keyfi sabit olduğundan iki kez türev alırsak

$$2(x-a) + 2(y-c_2)y' = 0$$

$$2x + 2y'y' + 2(y-c_2)y'' = 0 \Rightarrow y-c_2 = -\frac{x+(y')^2}{y''} \text{ olur.}$$

$$2(x-a) + 2\left(-\frac{x+(y')^2}{y''}\right)y' = 0 \Rightarrow x-a = \frac{x+(y')^2}{y''}y' \text{ olur.}$$

$$(x-a)^2 + (y-c_2)^2 = 1 \text{ olduğundan}$$

$$\left(\frac{x+(y')^2}{y''} \cdot y'\right)^2 + \left(-\frac{x+(y')^2}{y''}\right)^2 = 1$$

$$\frac{(x+(y')^2)^2 (1+(y')^2)}{(y'')^2} = (y'')^2 \text{ denklemini elde edilir.}$$



Örneği: Genel çözümlü $cx_y + c^2x + 4 = 0$ olan diferansiyel denklemini bulunuz ve sınıflandırınız.

c te x keyfi parametresi! olduğundan bir $tr z$ türev alırsak

$$cy + cxy' + c^2 = 0 \text{ dur. Buradan}$$

$$c(y + xy') = -c^2 \Rightarrow c = -y - xy', \quad c \neq 0 \text{ dur.}$$

= $cx_y + c^2x + 4 = 0$ da yerine yazılırsa
 $xy(-y - xy') + x(-y - xy')^2 + 4 = 0$ denklemini elde edilir.

Düzenlenirse

$$\cancel{-xy^2} - \cancel{x^2yy'} + \cancel{xy^2} + 2x^2yy' + x^3(y')^2 + 4 = 0$$

$$\Rightarrow x^3(y')^2 + x^2yy' + 4 = 0 \text{ elde edilir. ve 1. mertebe}$$

2. derece dinceer olmayan bir denklemdir.



Örnek! $y = ae^{3x} + be^{2x}$ (a, b sabitler) eğri ailesinin diferansiyel denklemini bulunuz.

a ve b iki keyfi sabit olduğundan iki kez türev alırsak

$$\textcircled{*} \begin{cases} y' = 3ae^{3x} + 2be^{2x} \\ y'' = 9ae^{3x} + 4be^{2x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} be^{2x} &= y - ae^{3x} &> \Rightarrow y' - 3ae^{3x} &= 2(y - ae^{3x}) \\ 2be^{2x} &= y' - 3ae^{3x} &> \Rightarrow y' - 2y &= ae^{3x} \\ 4be^{2x} &= y'' - 9ae^{3x} &> \Rightarrow y'' - 9ae^{3x} &= 2(y' - 3ae^{3x}) \\ & &> \Rightarrow y'' - 2y' &= 3ae^{3x} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y'' - 2y' = 3(y' - 2y) \Rightarrow y'' - 5y' + 6y = 0 \text{ bulunur.}$$

veya $\textcircled{*}$ sistemi a ve b bilinmeyenlerine göre çözümlenerek a ve b değerleri eğri ailesinde yazılarak da denklemin bulunabilir.

Örnek: $y = e^{ax+by}$ (a, b keyfi sabitler) eğri ailesinin diferansiyel denklemini bulunuz.

a ve b iki keyfi sabit var olduğundan iki kez türev alınacaktır.

Bağımlı y değişkeni üstel fonksiyonları da var olduğundan ifade

$$\ln y = ax + by$$

şeklinde düzenlenirse türevler daha kolay alınır.

$$1. \text{ türev: } \frac{y'}{y} = a + by'$$

$$2. \text{ türev: } \frac{y'' \cdot y - y' y'}{y^2} = by'' \Rightarrow y'' y - (y')^2 = by^2 y'' \quad \text{--- } (*)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{\ln y - by}{x} + by' \Rightarrow \frac{y'}{y} - \frac{\ln y}{x} = b(y' - \frac{y}{x}) \Rightarrow xy' - y \ln y = b(xy' - y^2) \quad \text{--- } (**)$$

$(*)$ ve $(**)$ eşitlikleri oranlanırsa

$$y^2 (\ln y - 1) y'' + y (y')^2 - x (y')^3 = 0$$





UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Dr.Öğr. Üyesi Fatma Hıra

Diferansiyel Denklemler I

Ders 2