



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



1

Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Dijital Ders Platformu

Cisimlerin Hacimleri
ve Yüzey Alanları

Dr. Öğretim Üyesi Ergin BAYRAM

Ders 14

Cisimlerin Hacimleri

Bu bölümde verilen bir eğriyi bir doğru etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini hesaplayacağız. Etrafında dönme yapılan doğruya dönme eksenini, oluşan cisme ise dönel cisim denir.

Dönel cisimlerin hacmini bulmak için disk veya kubbük yöntemi kullanılır. İki metodu arasında da dairesel dik silindirin hacmi vardır.

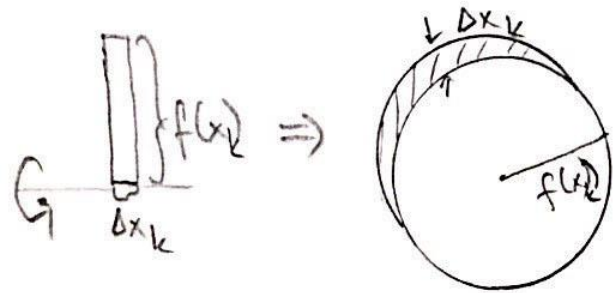
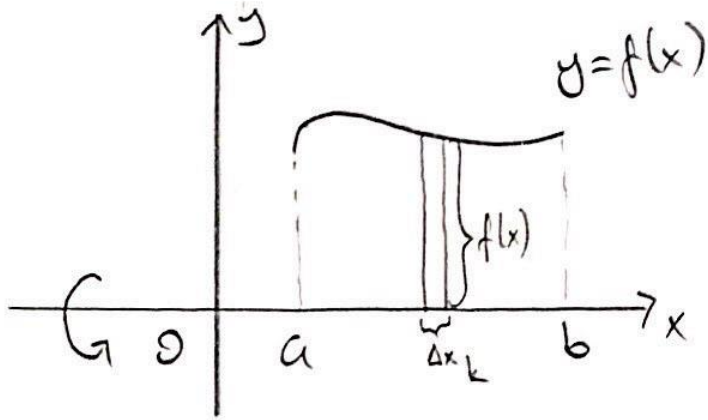
Taban yarıçapı r , yüksekliği h olan bir dairesel dik silindirin hacmi

$$V = \pi r^2 h$$

dir.

1) Disk yöntemi

$y=f(x)$ fonksiyonun $[a, b]$ aralığında sürekli olsun. Bu eğriyi $[a, b]$ aralığında kalan kısmının x eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulalım.



$[a, b]$ aralığını n parçaya bölelim. Her bir dikdörtgenin dönmeye yarımçapı $f(x_k)$, yüksekliği Δx_k olan bir silindir olur. Bu silindirin hacmi

$$V_k = \pi (f(x_k))^2 \Delta x_k$$

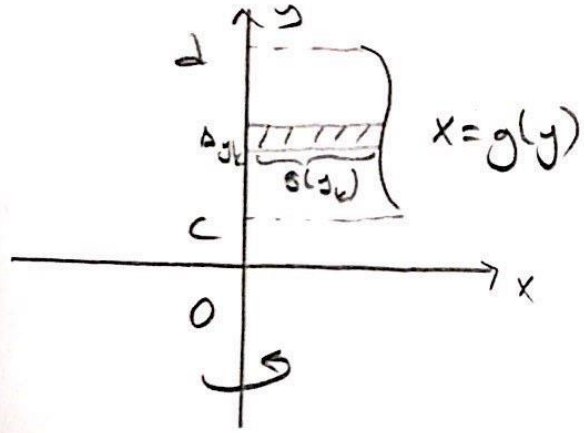
dir. 0 halde oluşan cismin hacmi

$$V \approx \sum_{k=1}^n V_k$$

ve

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n V_k = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

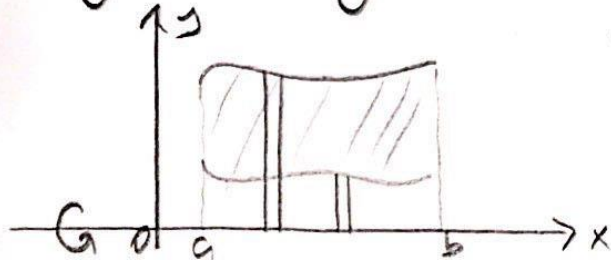
Benzer şekilde $x=g(y)$ eğrisinin $[c,d]$ aralığında ka-
lan parçasının y eksenine etrafında döndürülmesiyle
oluşan cismin hacmi



$$V = \pi \int_c^d (g(y))^2 dy$$

dir.

Not: $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ eğrileri ile $x=a$, $x=b$ doğrularının
sınırladığı bölgenin x eksenine etrafında dönmesiyle
meydana gelen cismin hacmi



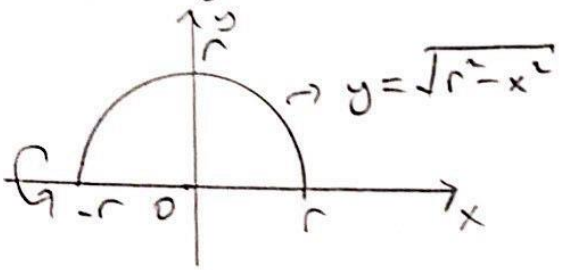
$$V = \text{Dıştaki eğri ile dönmesiyle oluşan hacim}$$

- içteki " " " "

$$= \pi \int_a^b [(f_1(x))^2 - (f_2(x))^2] dx$$

Örnek: r yarıçaplı kürenin hacmini bulalım.

r yarıçaplı küre, r yarıçaplı merkezli çemberin x eksenine veya y eksenine etrafında döndürülmesiyle elde edilebilir.

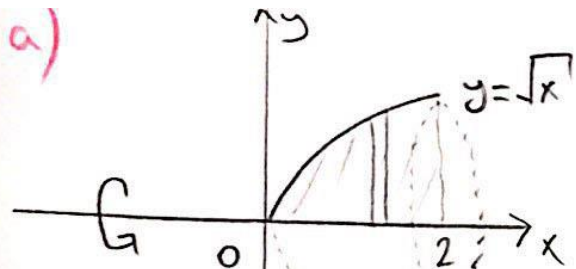


$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= r^2 \Rightarrow y = \pm \sqrt{r^2 - x^2} \\ \Rightarrow V &= \pi \int_{-r}^r (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx \\ &= \pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-r}^r = \pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} + r^3 - \frac{r^3}{3} \right) \\ &= \frac{4}{3} \pi r^3\end{aligned}$$

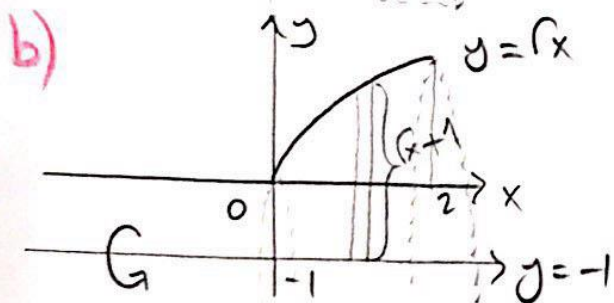
Örnek: $y = \sqrt{x}$ eğrisi, x eksenine ve $x = 2$ doğrusu tarafından sınırlanan bölgenin

- x eksenine,
- $y = -1$ doğrusu
- $x = 2$ doğrusu
- $x = -1$ doğrusu

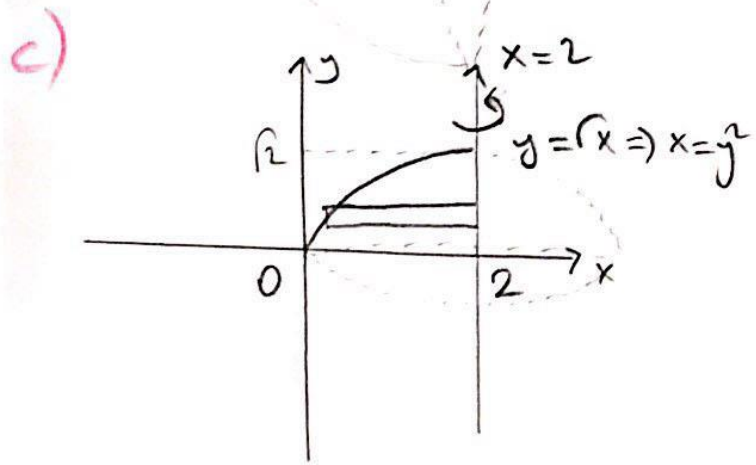
etrafında döndürülmesiyle oluşan cisimlerin hacimlerini bulalım. 165



$$V = \pi \int_0^2 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^2 x dx = \frac{\pi}{2} x^2 \Big|_0^2 = 2\pi$$

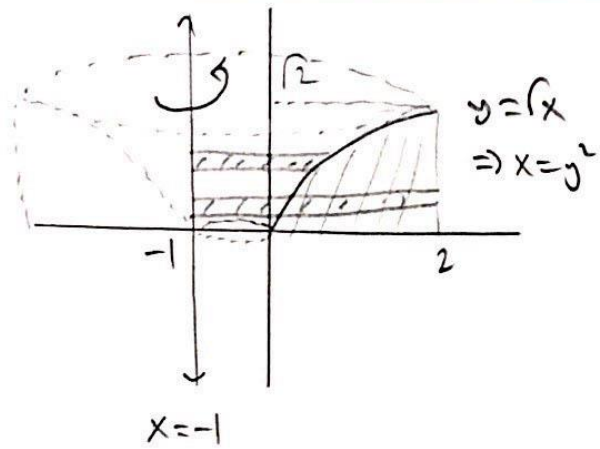


$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 (\sqrt{x} + 1)^2 dx = \pi \int_0^2 (x + 2\sqrt{x} + 1) dx \\ &= \pi \left(\frac{x^2}{2} + \frac{4}{3} x^{3/2} + x \right) \Big|_0^2 \\ &= \pi \left(2 + \frac{8\sqrt{2}}{3} + 2 \right) = \pi \left(4 + \frac{8\sqrt{2}}{3} \right) \end{aligned}$$



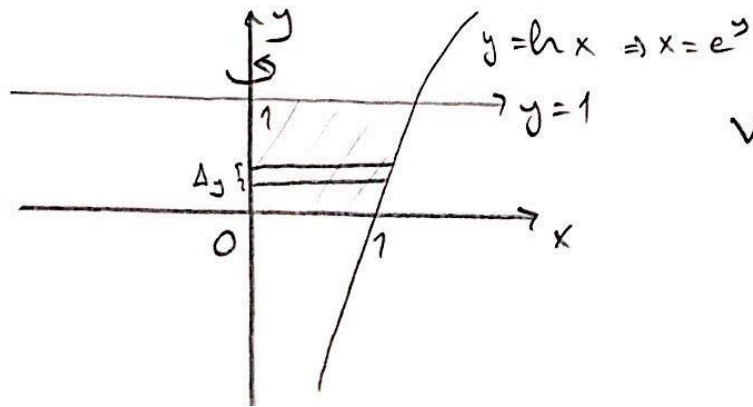
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\sqrt{2}} (2 - y^2)^2 dy = \pi \int_0^{\sqrt{2}} (4 - 4y^2 + y^4) dy \\ &= \pi \left(4y - \frac{4}{3} y^3 + \frac{y^5}{5} \right) \Big|_0^{\sqrt{2}} \\ &= \pi \left(4\sqrt{2} - \frac{8\sqrt{2}}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{5} \right) = \pi \frac{32\sqrt{2}}{15} \end{aligned}$$

d)



$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^{\sqrt{2}} 9 dy - \pi \int_0^{\sqrt{2}} (y^2 - (-1))^2 dy \\
 &= 9\sqrt{2}\pi - \pi \int_0^{\sqrt{2}} (y^4 + 2y^2 + 1) dy \\
 &= 9\sqrt{2}\pi - \pi \left(\frac{y^5}{5} + \frac{2y^3}{3} + y \right) \Big|_0^{\sqrt{2}} \\
 &= 9\sqrt{2}\pi - \pi \left(\frac{4\sqrt{2}}{5} + \frac{4\sqrt{2}}{3} + \sqrt{2} \right) = \frac{88\sqrt{2}}{15} \pi
 \end{aligned}$$

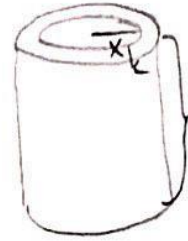
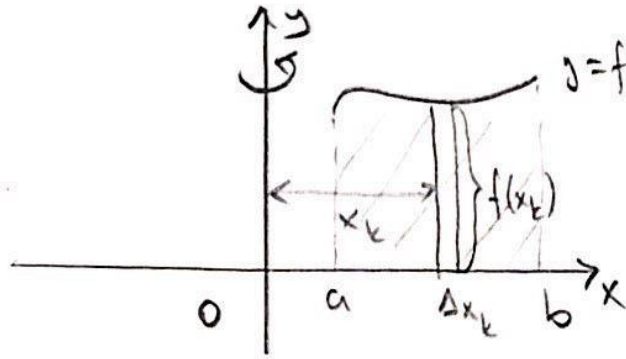
Örnek: $y = \ln x$ eğrisi, x eksen, y eksen ve $y = 1$ doğrusu arasında kalan bölgenin y eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulalım.



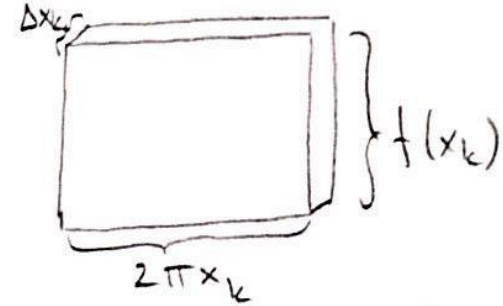
$$V = \pi \int_0^1 (e^y)^2 dy = \frac{\pi}{2} e^{2y} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} (e^2 - 1)$$

2) Kabuk yöntemi

$y=f(x)$ eğrisi, x eksen, $x=a$ ve $x=b$ doğrularının sınırladığı bölgenin y eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulalım. $[a,b]$ aralığı n parçaya bölündüğünde her bir parçanın döndürülmesiyle içi boş silindirek oluştur.



$f(x_k) \Rightarrow$



İçi boş silindiri açtığımızda bir kenarı $f(x_k)$, diğer kenarı $2\pi x_k$ ve kalınlığı Δx_k olan dikdörtgen prizma elde ederiz. O halde içi boş silindirin hacmi

$$V_k = 2\pi x_k f(x_k) \Delta x_k$$

olur. Aranan hacim ise

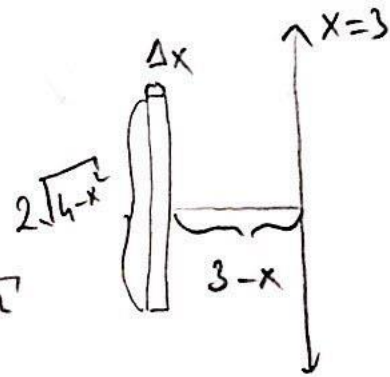
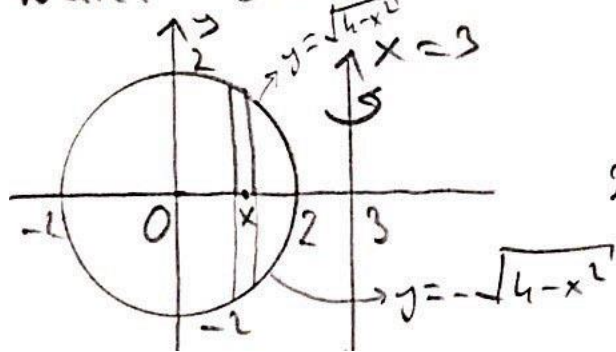
$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 2\pi x_k f(x_k) \Delta x_k = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

dir. Benzer şekilde $x = g(y)$ eğrisi, y eksenini, $y = c$ ve $y = d$ doğrularının sınırladığı bölgenin x eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi

$$V = 2\pi \int_c^d y g(y) dy$$

dir.

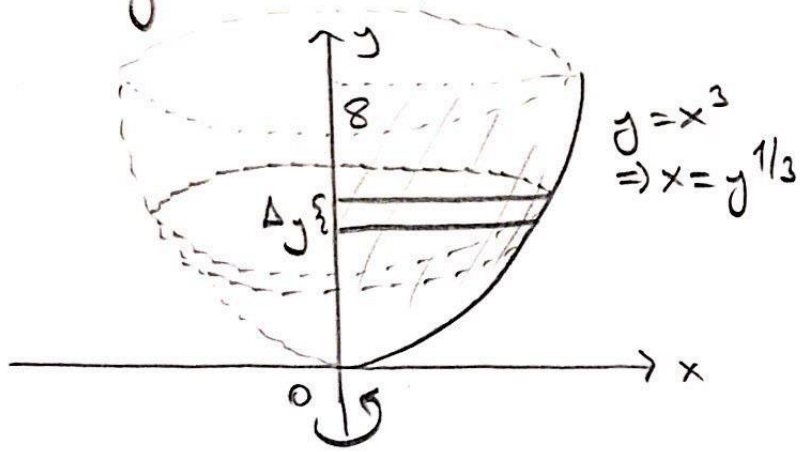
Örnek: $x^2 + y^2 = 4$ çemberi tarafından sınırlanan bölgenin $x = 3$ doğrusunu etrafında dönmesiyle oluşan cismin hacmini bulalım.



$$V = 2\pi \int_{-2}^2 (3-x) 2\sqrt{4-x^2} dx$$

$$= 24\pi$$

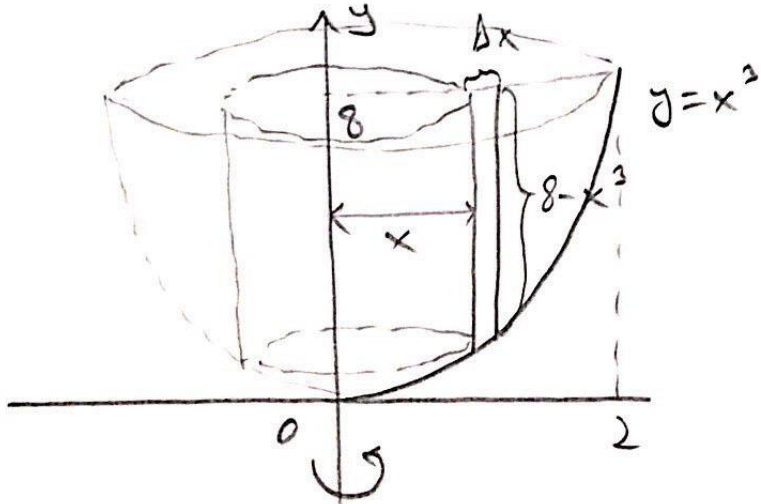
Örnek: 1. bölgede $y=x^3$, $y=8$ ve y eksenini tarafından sınırlanan bölgenin y eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulalım.



Disk yöntemi ile

$$V = \pi \int_0^8 (y^{1/3})^2 dy = \frac{3\pi}{5} y^{5/3} \Big|_0^8$$

$$= \frac{3\pi}{5} (2^3)^{5/3} = \frac{96}{5} \pi$$



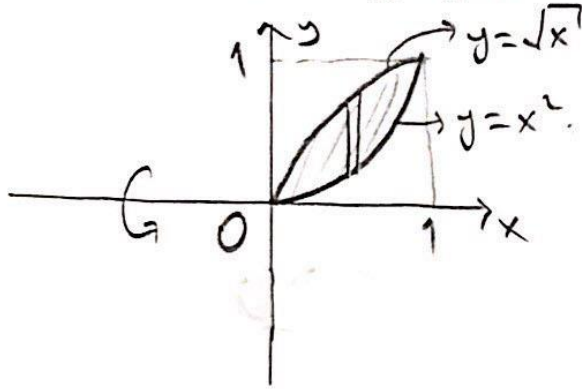
Kabuk yöntemi ile

$$V = 2\pi \int_0^2 x(8 - x^3) dx$$

$$= 2\pi \int_0^2 (8x - x^4) dx = 2\pi \left(4x^2 - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2$$

$$= 2\pi \left(16 - \frac{32}{5} \right) = \frac{96}{5} \pi$$

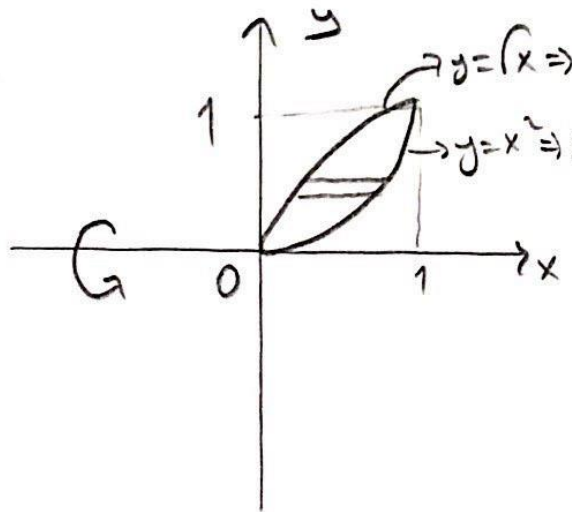
Örnek: 1. bölgede $y=x^2$ ve $y=\sqrt{x}$ eğrilerinin sınırladığı bölgenin x eksenine etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulalım.



Disk yöntemi ile

$$V = \pi \int_0^1 x dx - \pi \int_0^1 x^4 dx = \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1$$

$$= \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \frac{3}{10} \pi$$



Kabuk yöntemi ile

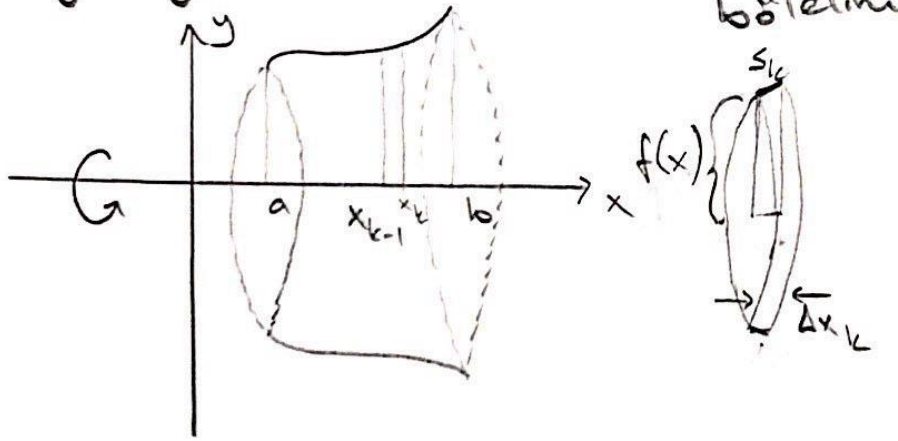
$$V = 2\pi \int_0^1 y(\sqrt{y} - y^2) dy = 2\pi \int_0^1 (y^{3/2} - y^3) dy$$

$$= 2\pi \left(\frac{2}{5} y^{5/2} - \frac{y^4}{4} \right) \Big|_0^1 = 2\pi \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{4} \right)$$

$$= \frac{3\pi}{10}$$

Dönel cisimlerin yüzey alanı

$y=f(x)$ eğrisinin $[a, b]$ aralığı üzerindeki parçasının x eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin yüzey alanını hesaplayalım. Önce $[a, b]$ aralığını n parçaya bölelim



$$s_k = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}$$

\Rightarrow Eğrinin $[x_{k-1}, x_k]$ aralığı üzerindeki parçasının dönmeyeyle oluşan yüzey alanı

$$YA_k = 2\pi f(x) s_k$$

$$= 2\pi f(x) \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}$$

$$= 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(c_k))^2} \Delta x_k, c_k \in (x_{k-1}, x_k)$$

Dönel cismin yüzey alanı yaklaşım ile olarak

$$YA \approx \sum_{k=1}^n YA_k = \sum_{k=1}^n 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(c_k))^2} \Delta x_k$$

dir.

$$\Rightarrow \gamma A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 2\pi f(x_k) \sqrt{1 + (f'(c_k))^2} \Delta x_k$$

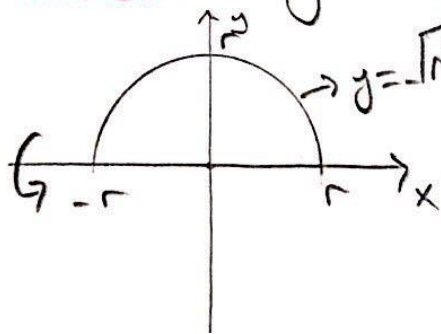
$$\Rightarrow \gamma A = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Not: $x = g(y)$ eğrisinin $y = c$ ve $y = d$ arasında kalan parçasının y eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin yüzey alanı

$$\gamma A = \int_c^d 2\pi g(y) \sqrt{1 + (g'(y))^2} dy$$

dir.

Örnek: r yarıçaplı kürenin yüzey alanını hesaplayalım.



$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\Rightarrow \gamma A = \int_{-r}^r 2\pi \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2} dx$$

$$\Rightarrow YA = \int_{-r}^r 2\pi \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = \int_{-r}^r 2\pi \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} dx$$

$$= 2\pi \int_{-r}^r r dr = 2\pi rx \Big|_{-r}^r = 2\pi(r^2 + r^2) = 4\pi r^2$$

Örnek: $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$ eğrisinin $[1, 2]$ aralığı üzerindeki parçasının x eksenine etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin yüzey alanını hesaplayalım.

$$y' = x^2 - \frac{1}{4x^2} \Rightarrow \sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \left(x^2 - \frac{1}{4x^2}\right)^2} = \sqrt{1 + x^4 - \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^4}}$$

$$= \sqrt{x^4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^4}} = \sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{4x^2}\right)^2} = x^2 + \frac{1}{4x^2}$$

$$\Rightarrow YA = \int_1^2 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_1^2 2\pi \left(\frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}\right) \left(x^2 + \frac{1}{4x^2}\right) dx$$

$$= 2\pi \int_1^2 \frac{4x^4 + 3}{12x} \frac{4x^4 + 1}{4x^2} dx = 2\pi \int_1^2 \frac{16x^8 + 16x^4 + 3}{48x^3} dx = 2\pi \int_1^2 \left(\frac{x^5}{3} + \frac{x}{3} + \frac{1}{16x^3}\right) dx$$

$$= 2\pi \left(\frac{x^6}{18} + \frac{x^2}{6} - \frac{1}{32x^2}\right) \Big|_1^2 = 2\pi \left(\frac{64}{18} + \frac{4}{6} - \frac{1}{128} - \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{6} - \frac{1}{32}\right)\right) = \frac{131}{64} \pi$$



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Dr. Öğretim Üyesi Ergin BAYRAM

Temel Bilim Dersleri
Matematik II

Ders 8