ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Dijital Ders Platformu

Trigonometrik İntegraller

Dr. Öğretim Üyesi Ergin BAYRAM

Ders 9

Trigonometrik integraller

Trigonometrik integraller, integrantı trigonometrik fonksiyonların cebirsel kombinasyonları olan integrallerdir.

1) $R(\sin x, \cos x)$ integralleri

a) $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x) \Rightarrow \cos x = u$ değişimi

b) $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x) \Rightarrow \sin x = u$ " "

c) $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x) \Rightarrow \tan x = u$ " "

d) Bunlar işe yaramaz ise $\tan\frac{x}{2} = u$ değişimi yapılır.

$$\tan\frac{x}{2} = t \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

olduğu daha önce verilmişti.

Örnek: $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,dx = ?$

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}$$

$$R(-\sin x, \cos x) = \frac{(-\sin x)^3}{\cos^2 x} = -\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} = -R(\sin x, \cos x) \Rightarrow \cos x = u$$ değişimi yapılır.

$$\cos x = u \Rightarrow -\sin x\,dx = du$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\sin x\,dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\sin x\,dx = -\int \frac{1-u^2}{u^2}\,du$$

$$= -\int \frac{1}{u^2}\,du + \int du = \frac{1}{u} + u + C = \frac{1}{\cos x} + \cos x + C$$

$$= \sec x + \cos x + C.$$

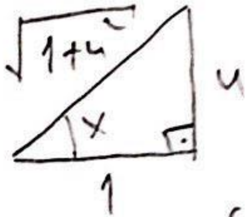
Örnek: $I=\int \frac{dx}{\sin^2x\cos^4x} = ?$

$$R(\sin x,\cos x)=\frac{1}{\sin^2x\cos^4x}$$

$$R(-\sin x,-\cos x)=\frac{1}{(-\sin x)^2(-\cos x)^4}=\frac{1}{\sin^2x\cos^4x}=R(\sin x,\cos x)$$

$\Rightarrow$ $\tan x=u$ dönüşümü yapılır

$$\Rightarrow \sec^2x\,dx=du \Rightarrow dx=\cos^2x\,du=\frac{du}{1+u^2}$$



$$\sin x=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}},\quad \cos x=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$\Rightarrow I=\int \frac{\cancel{1+u^2}}{u^2}\cdot(1+u^2)^2\cdot\frac{du}{\cancel{1+u^2}}=\int\frac{1+2u^2+u^4}{u^2}\,du=\int\frac{du}{u^2}+2\int du+\int u^2du$$

$$=-\frac{1}{u}+2u+\frac{u^3}{3}+c=-\frac{1}{\tan x}+2\tan x+\frac{\tan^3x}{3}+c$$

$$=2\tan x-\cot x+\frac{\tan^3x}{3}+c$$

2) $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$ integralleri

a) m tek, n çift veya m çift, n tek ise kuvveti çift olana değişken değişimi yapılır.

b) m ve n tek ise herhangi birine değişken değişimi yapılır.

c) m ve n çift ise

$$\cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

bağıntıları kullanılarak integrantın derecesi düşürülür.

Örnek: $I = \int \sin^5 x \cos^2 x \, dx = ?$

$m = 5$ tek, $n = 2$ çift $\Rightarrow$ $\cos x = u$ değişken değişimi yapılır.

$\Rightarrow -\sin x \, dx = du$

$$I = \int (\sin^2 x)^2 \cos^2 x \sin x \, dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \sin x \, dx = -\int (1 - u^2)^2 u^2 \, du$$

$$= -\int (u^2 - 2u^4 + u^6) \, du = -\frac{u^3}{3} + \frac{2u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + c = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{2\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^7 x}{7} + c$$

Örnek: $I=\int \sin^9 x \cos^3 x \, dx = ?$

$m=9$ tek, $n=3$ tek $\Rightarrow$ Herhangi birine u denilebilir. Fakat kuvveti büyük olana u demek işlem kolaylığı sağlar.

$\sin x = u \Rightarrow \cos x \, dx = du$

$$I=\int \sin^9 x \cos^2 x \cos x \, dx = \int \sin^9 x (1-\sin^2 x) \cos x \, dx$$

$$= \int u^9 (1-u^2) du = \int (u^9 - u^{11}) du = \frac{u^{10}}{10} - \frac{u^{12}}{12} + c$$

$$= \frac{\sin^{10} x}{10} - \frac{\sin^{12} x}{12} + c.$$

Örnek: $I=\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx = ?$

m ve n çift olup $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ bağıntıları kullanılarak integrantın derecesi düşürülür.

$$\sin^4 x\cos^2 x = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x}{4} \quad \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$= \frac{1-\cos 2x-\cos^2 2x+\cos^3 2x}{8}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{8}\int(1-\cos 2x-\cos^2 2x+\cos^3 2x)dx$$

$$= \frac{1}{8}\left[x - \frac{\sin 2x}{2} - \int\cos^2 2x\,dx + \int\cos^3 2x\,dx\right]$$

$$\int\cos^2 2x\,dx = \int\frac{1+\cos 4x}{2}dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 4x}{8}$$

$$\int\cos^3 2x\,dx = \int\cos^2 2x\cos 2x\,dx = \int(1-\sin^2 2x)\cos 2x\,dx$$

$$\begin{pmatrix}\sin 2x = u\\ \cos 2x\,dx = \frac{du}{2}\end{pmatrix} = \int(1-u^2)\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\left(u-\frac{u^3}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\sin 2x - \frac{\sin^3 2x}{3}\right)$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{8}\left[x - \cancel{\frac{\sin 2x}{2}} - \frac{x}{2} - \frac{\sin 4x}{8} + \cancel{\frac{\sin 2x}{2}} - \frac{\sin^3 2x}{3}\right) + C$$

3) $\int \sin ax \sin bx\,dx$, $\int \sin ax \cos bx\,dx$, $\int \cos ax \cos bx\,dx$ tipindeki integraller

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x]$$

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}[\sin(a+b)x + \sin(a-b)x]$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}[\cos(a+b)x + \cos(a-b)x]$$

bağıntıları kullanılarak hesaplanır.

Örnek: $I = \int \sin 7x \sin 4x\,dx = ?$

$$I = \frac{1}{2}\int(\cos 3x - \cos 11x)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 11x}{11}\right) + c.$$

Örnek: $I = \int \sin 5x \cos 3x\,dx = ?$

$$I = \frac{1}{2}\int(\sin 8x + \sin 2x)dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 8x}{8} - \frac{\cos 2x}{2}\right) + c$$

Örnek: $I = \int \cos 4x \cos 3x \, dx = ?$

$$I = \frac{1}{2}\int (\cos 7x + \cos x)\, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 7x}{7} + \sin x\right) + c$$

4) $\int \tan^m x \sec^n x \, dx$ tipindeki integraller

a) n çift $\Rightarrow$ $\tan x = u$ değişken değişimi,

b) m tek $\Rightarrow$ $\sec x = u$ " " yapılır.

c) m çift, n tek $\Rightarrow$ $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ bağıntısı yardımı ile integrant sadece $\sec x$ in tek kuvvetlerinin toplamı şekline dönüştürülür.

Örnek: $I = \int \tan^6 x \sec^4 x \, dx = ?$

$m = 6$ çift, $n = 4$ çift $\Rightarrow$ Herhangi birine u denilebilir.

$\tan x = u \Rightarrow \sec^2 x \, dx = du$

$$I=\int \tan^6 x \sec^2 x \sec^2 x\,dx=\int \tan^6 x(\tan^2 x+1)\sec^2 x\,dx$$

$$=\int u^6(1+u^2)\,du=\int (u^6+u^8)\,du=\frac{u^7}{7}+\frac{u^9}{9}+c=\frac{\tan^7 x}{7}+\frac{\tan^9 x}{9}+c$$

Örnek: $I=\int \tan^5 x \sec^3 x\,dx=?$

$m=5$ tek $\Rightarrow$ $\sec x=u \Rightarrow \tan x \sec x\,dx=du$

$$I=\int (\tan^2 x)^2 \sec^2 x \tan x \sec x=\int (\sec^2 x-1)^2 \sec^2 x \tan x \sec x\,dx$$

$$=\int (u^2-1)u^2\,du=\int (u^4-u^2)\,du=\frac{u^5}{5}-\frac{u^3}{3}+c=\frac{\sec^5 x}{5}-\frac{\sec^3 x}{3}+c$$

Uyarı: m çift, n tek olduğu durumda integrant $\sec x$ in tek kuvvetlerinin toplamı haline geleceği için $\sec x$ in tek kuvvetlerinin integraline ihtiyaç duyulur.

Örnek: $I = \int \sec x \, dx = ?$

$$I = \int \sec x \, \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx$$

$\sec x + \tan x = u$

$\Rightarrow (\sec x \tan x + \sec^2 x) dx = du$

$$= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$$

$$= \ln|\sec x + \tan x| + c$$

Örnek: $I=\int \sec^3 x\,dx=?$

$$I=\int \sec x \sec^2 x\,dx = uv-\int v\,du = \sec x\tan x-\int \tan^2 x\sec x\,dx$$

$\sec x=u,\ \sec^2 x\,dx=dv$

$\sec x\tan x\,dx=du \quad v=\tan x$

$$=\sec x\tan x-\int(\sec^2 x-1)\sec x\,dx$$

$$=\sec x\tan x-\int\sec^3 x\,dx+\int\sec x\,dx$$

$$=\sec x\tan x-I+\ln|\sec x+\tan x|+c$$

$$\Rightarrow 2I=\sec x\tan x+\ln|\sec x+\tan x|+c$$

$$\Rightarrow I=\frac{\sec x\tan x}{2}+\frac{\ln|\sec x+\tan x|}{2}+c_1$$

Örnek: $I=\int \tan^2 x\sec x\,dx=?$

$m=2$ çift, $n=1$ tek $\Rightarrow$ $\tan^2 x=\sec^2 x-1$ bağıntısını kullanacağız.

$$I=\int(\sec^2 x-1)\sec x\,dx=\int(\sec^3 x-\sec x)dx=\frac{\sec x\tan x}{2}+\frac{\ln|\sec x+\tan x|}{2}-\ln|\sec x+\tan x|+c$$

$$=\frac{\sec x\tan x}{2}-\frac{\ln|\sec x+\tan x|}{2}+c$$

5) $\int \cot^m x \, \mathrm{cosec}^n x \, dx$ tipindeki integraller

$\int \tan^m x \sec^n x \, dx$ integraline benzer şekilde yapılır.

$\mathrm{cosec}^2 x = 1 + \cot^2 x$ bağıntısından yararlanılır.

Örnek: $I = \int \cot^3 x \, \mathrm{cosec}^4 x \, dx = ?$

$m=3$ tek, $n=4$ çift $\Rightarrow$ $\cot x = u$, $-\mathrm{cosec}^2 x \, dx = du$

$\Rightarrow I = \int \cot^3 x \, \mathrm{cosec}^2 x \, \mathrm{cosec}^2 x \, dx = \int \cot^3 x (1 + \cot^2 x) \mathrm{cosec}^2 x \, dx$

$= -\int u^3 (1+u^2) \, du = -\dfrac{u^4}{4} - \dfrac{u^6}{6} + c$

$= -\dfrac{\cot^4 x}{4} - \dfrac{\cot^6 x}{6} + c$

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Dr. Öğretim Üyesi Ergin BAYRAM

Temel Bilim Dersleri
Matematik II

Ders 3