



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



1

Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Dijital Ders Platformu

Basit Kesirlere Ayırma
Yöntemi

Dr. Öğretim Üyesi Ergin BAYRAM

Ders 7

Basit kesirlere ayırma yöntemi

$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ şeklinde rasyonel bir fonksiyon olsun.

der $P(x) = n$, der $Q(x) = m$ sayılarına göre inceleme yapalım.

1) $n > m$ ise polinom bölmesi yapılır.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{K(x) \cdot Q(x) + R(x)}{Q(x)} \Rightarrow \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int K(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$$

2) $n < m$ ve $Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_m)$ şeklinde farklı a_1, a_2, \dots, a_m köklerine sahip ise

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_m)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \dots + \frac{A_m}{x-a_m}$$

şeklinde yazılıp payda eşitlenerek A_i ler bulunur.

Beispiel: $\int \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 + 1} dx = ?$

$$\begin{array}{r} x^3 + 2x^2 \quad | \quad x^2 + 1 \\ -x^3 + x \quad | \quad x + 2 \\ \hline 2x^2 - x \end{array} \Rightarrow \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 + 1} = x + 2 - \frac{x + 2}{x^2 + 1}$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 - x \\ -2x^2 + 2 \\ \hline -x - 2 \end{array} \Rightarrow \int \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 + 1} dx = \int \left(x + 2 - \frac{x + 2}{x^2 + 1} \right) dx = \int (x + 2) dx - \int \frac{x + 2}{x^2 + 1} dx$$

$$= x^2 + 2x - \int \frac{x}{x^2 + 1} dx - 2 \int \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

$$= x^2 + 2x - \frac{\ln(x^2 + 1)}{2} - 2 \arctan x + C.$$

Beispiel: $\int \frac{x - 5}{x^2 - 5x + 6} dx = ?$

$$\frac{x - 5}{x^2 - 5x + 6} = \frac{x - 5}{(x - 3)(x - 2)} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x - 2} = \frac{Ax - 2A + Bx - 3B}{x^2 - 5x + 6}$$

$$\Rightarrow x-5 = (A+B)x - 2A - 3B \Rightarrow A+B=1, -2A-3B=-5$$

$$\Rightarrow 3/A+B=1$$

$$\frac{-2A-3B=-5}{A=-2, B=3}$$

$$\Rightarrow \frac{x-5}{x^2-5x+6} = \frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-3}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x-5}{x^2-5x+6} dx = \int \frac{3}{x-2} dx - \int \frac{2}{x-3} dx = 3 \ln|x-2| - 2 \ln|x-3| + C$$

3) $Q(x)$ in katlı kökleri varsa

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a_1)^k (x-a_2)^r (x-a_3) \dots (x-a_p)}$$

$$= \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a_1)^k} + \frac{B_1}{x-a_2} + \frac{B_2}{(x-a_2)^2} + \dots + \frac{B_r}{(x-a_2)^r}$$

$$+ \frac{C_1}{x-a_3} + \frac{C_2}{x-a_4} + \dots + \frac{C_{p-2}}{x-a_p}$$

yazılarak A_i, B_j, C_k sabitleri bulunup işlem yapılır.

Ornek: $\int \frac{x^2-2}{(x-1)^3} dx = ?$

$$\frac{x^2-2}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} = \frac{A(x-1)^2 + B(x-1) + C}{(x-1)^3}$$

$$\Rightarrow x^2-2 = A(x-1)^2 + B(x-1) + C = Ax^2 - 2Ax + A + Bx - B + C$$
$$= Ax^2 + (B-2A)x + A - B + C$$

$$\Rightarrow A=1, \quad \underbrace{B-2A=0}_{B=2A=2}, \quad \underbrace{A-B+C=-2}_{1-2+C=-2 \Rightarrow C=-1}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-2}{(x-1)^3} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)^3}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^2-2}{(x-1)^3} dx = \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{2}{(x-1)^2} dx - \int \frac{1}{(x-1)^3} dx$$

$$= \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{2(x-1)^2} + C$$

4) $Q(x) = 0$ denkleminin 2. dereceden çarpanı varsa yani $Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(cx^2+dx+e)^k$ şeklinde ise

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \dots + \frac{C_1x+D_1}{cx^2+dx+e} + \frac{C_2x+D_2}{(cx^2+dx+e)^2} + \dots + \frac{C_kx+D_k}{(cx^2+dx+e)^k}$$

ya da olarak A_i, C_j, D_t bulunur.

Örnek: $\int \frac{x^2+3x+2}{x^3+x} dx = ?$

$$\frac{x^2+3x+2}{x^3+x} = \frac{x^2+3x+2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x^3+x}$$

$$\Rightarrow x^2+3x+2 = (A+B)x^2 + Cx + A \Rightarrow A=2, B=-1, C=3$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^2+3x+2}{x^3+x} dx = \int \frac{2}{x} dx + \int \frac{3-x}{x^2+1} dx = 2 \int \frac{1}{x} dx + 3 \int \frac{1}{x^2+1} dx - \int \frac{x}{x^2+1} dx$$

$$= 2 \ln|x| + 3 \arctan x - \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + c.$$

Örnek: $I = \int \frac{2x-3}{x^3+x} = ?$

$$\frac{2x-3}{x^3+x} = \frac{2x-3}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x^3+x} = \frac{(A+B)x^2+(x+A)}{x^3+x}$$

$$\Rightarrow A+B=0, C=2, A=-3 \Rightarrow B=3$$

$$\Rightarrow \frac{2x-3}{x^3+x} = -\frac{3}{x} + \frac{3x+2}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow I = -3 \int \underbrace{\frac{dx}{x}}_{\ln|x|} + \int \frac{3x+2}{x^2+1} dx = -3 \ln|x| + 3 \int \frac{x}{x^2+1} dx + 2 \int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= -3 \ln|x| + \frac{3}{2} \ln(x^2+1) + 2 \arctan x + C$$

Örnek: $\int \frac{dx}{e^{2x} - 4e^x + 4} = ?$

$$e^x = u \Rightarrow e^x dx = du \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x} = \frac{du}{u}$$

$$\int \frac{du}{u(u^2 - 4u + 4)} = \int \frac{du}{u(u-2)^2}$$

$$\frac{1}{u(u-2)^2} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-2} + \frac{C}{(u-2)^2} = \frac{A(u-2)^2 + Bu(u-2) + Cu}{u(u-2)^2}$$

$$\Rightarrow 1 = A(u-2)^2 + Bu(u-2) + Cu$$

$$u=0 \text{ için } 1 = A(-2)^2 = 4A \Rightarrow A = \frac{1}{4}$$

$$u=2 \text{ için } 1 = 2C \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{4}(u-2)^2 + Bu(u-2) + \frac{u}{2} \Rightarrow \text{işlemler yapılırsa } B = -\frac{1}{4} \text{ olarak}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u(u-2)^2} = \frac{1}{4u} - \frac{1}{4(u-2)} + \frac{1}{2(u-2)^2}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int \frac{du}{u(u-2)^2} &= \frac{1}{4} \int \frac{du}{u} - \frac{1}{4} \int \frac{du}{u-2} + \frac{1}{2} \int \frac{du}{(u-2)^2} \\ &= \frac{1}{4} \ln|u| - \frac{1}{4} \ln|u-2| - \frac{1}{2(u-2)} + C\end{aligned}$$

$$(e^x = u \text{ di}) = \frac{x}{4} - \frac{1}{4} \ln|e^x - 2| - \frac{1}{2(e^x - 2)} + C$$



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



10

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Dr. Öğretim Üyesi Ergin BAYRAM

Temel Bilim Dersleri
Matematik II

Ders 1