Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Belirsiz İntegral

Dr. Öğretim Üyesi Fatma GÜLER

Ders 5

BELİRSİZ İNTEGRAL

Tanım (Ters Türev): $I \subset \mathbb{R}$ aralığı $f: I \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu verilsin. Her $x \in I$ için $F'(x) = f(x)$ ise F fonksiyonuna f nin I aralığındaki ters türevi denir.

Örnek: $f(x) = 2x$ fonksiyonunun ters türevi $F(x) = x^2$ dur. Bir fonksiyonun her zaman birden fazla ters türevi vardır. Örneğin;

$$F_1(x) = x^2 + 1 \quad , \quad F_2(x) = x^2 + 3 \quad F_3(x) = x^2 - 10$$

fonksiyonları da $F_1'(x) = F_2'(x) = F_3'(x) = 2x$ olduğundan $f(x) = 2x$ fonksiyonunun ters türevleridir.

Teorem: Bir f fonksiyonunun herhangi iki ters türev fonksiyonu F ve G olsun. Bu durumda $F(x)-G(x)=c$ $c\in\mathbb{R}$ dir. Yani aynı fonksiyonun iki ters türevi en fazla bir sabit kadar farklı olabilir. Bu nedenle $F(x)+c$ ifadesi $f(x)$ fonksiyonunun en genel ters türev ifadesidir.

Örnek: $f(x)=4x^3+2x+3$ fonksiyonunun en genel ters türevi

$$F(x)=x^4+x^2+3x+c$$ dir. $(c\in\mathbb{R})$

Belirsiz İntegral Notasyonu

$F'(x)=f(x)$ olmak üzere bir f fonksiyonunun en genel ters türev ifadesi

$$\int f(x)dx = F(x)+c$$

şeklinde gösterilebilir. Burada $\int f(x)dx$ ifadesi f nin x e göre belirsiz integrali olarak adlandırılır. Yani f nin tüm ters türev fonksiyonlarının kümesine f nin belirsiz integrali denir ve

$\int f(x)dx$ sembolü ile gösterilir.

Burada

$$\int \underbrace{f(x)}_{\text{integrand}} \underbrace{dx}_{\text{değişkenin göst. dif. operatör.}} = \overbrace{F(x)}^{\text{ters türev fonk}} + \underbrace{c}_{\text{integral sabiti}} \quad , \ c\in\mathbb{R} \text{ dir.}$$

Sonuç olarak türev ve integral birbirinin tersi işlemlerdir diyebiliriz, ancak dikkat edilmesi gereken bir husus vardır.

❗ UYARI : $F'(x) = f(x)$, $F(x)$, $f(x)$ in ters türevi

$$\int \frac{d}{dx}(F(x))dx = \int f(x)dx = F(x) + c$$

Yani fonksiyonun önce türevi sonra integrali alınırsa kendisine eşit olmaz.

Ancak tam tersi;

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = \frac{d}{dx}(F(x) + c) = f(x)$$

Önce integral sonra türevi alınırsa kendisine eşit olur.

Teorem: $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ sürekli iki fonksiyon ve bunların ters türevleri F, G olsun. $\lambda\in\mathbb{R}$ olmak üzere

1) $\int(\lambda f)(x)\,dx = \lambda\int f(x)\,dx$

2) $\int(f+g)(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

dir.

Bu teoreme göre

- λf nin ters türevi λF
- $f+g$ nin 〃 $F+G$ olur.

Ters türev ilişkisinden bazı fonksiyonların integralleri

$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n$ olup $\int \frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)dx = \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

$\frac{d}{dx}(x+c) = 1$ olup $\int \frac{d}{dx}(x+c)dx = \int dx = x + c$

$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}$ olup $\int \frac{d}{dx}(\ln|x|)dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$

$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ olup $\int \frac{d}{dx}(e^x)dx = \int e^x dx = e^x + c$

$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$ olup $\int \frac{d}{dx}(a^x)dx = \int a^x \ln a \, dx = a^x + c$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \quad \text{olup} \quad \int \frac{d}{dx}(\sin x)\,dx = \int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x \quad \text{olup} \quad \int \frac{d}{dx}(-\cos x)\,dx = \int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = 1 + \tan^2 x = \sec^2 x \quad \int \frac{d}{dx}(\tan x)\,dx = \int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -(1 + \cot^2 x) = -\mathrm{cosec}^2 x \quad \int \frac{d}{dx}(-\cot x)\,dx = \int \mathrm{cosec}^2\,dx = -\cot x + c$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\arcsin x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{d}{dx}(\arccos x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}\right\} \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c = -\arccos x + c$$

$$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arccot} x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\left.\right\} \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c$$
$$= -\operatorname{arccot} x + c$$

$$\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x \Rightarrow \int \cosh x\,dx = \sinh x + c$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x \Rightarrow \int \sinh x\,dx = \cosh x + c$$

Örnek: $I = \int \left(2x^3 + \frac{4}{5}\sqrt[3]{x} - \frac{x\sqrt{x} + \sqrt{x}}{x^3} + \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} \right) dx = ?$

Çözüm: $I = 2\int x^3 dx + \frac{4}{5}\int x^{1/3} dx - \int \frac{x^{1/2}}{x^2} dx - \int \frac{x^{1/2}}{x^3} dx + \int \frac{1}{x^{2/5}} dx$

$$I = 2\int x^3 dx + \frac{4}{5}\int x^{1/3} dx - \int x^{-3/2} dx - \int x^{-\frac{5}{2}} dx + \int x^{-2/5} dx$$

$$I = 2 \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} x^{4/3} + 2x^{-1/2} + \frac{2}{3} x^{-3/2} + \frac{5}{3} x^{3/5} + c$$

Burada herbir integral için integral sabiti c_1, c_2, c_3, c_4 olmak üzere $c = c_1 + c_2 + c_3 + c_4$ yazılabilir.

İntegral Alma Yöntemleri

Değişken Değiştirme Yöntemi: Bazı integrallerin hesabında değişken dönüşümü kullanmak verilen integralin daha kolay hesaplanabilmesini sağlar.

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx$$ formundaki bir integrali

hesaplamak için $g(x) = u \Rightarrow g'(x)\,dx = du$ yazılırsa

$$\int f(u)\,du = F(u) + c = F(g(x)) + c$$

elde edilir.

! UYARI :

İntegrali alınacak fonksiyonun içinde bir ifadenin hem türevi hem de kendisi mevcut ise değişken değiştirme yöntemi kullanılır.

Örnek: $\int e^{\sin x} . \cos x \, dx = ?$

$\sin x = u \Rightarrow \cos x \, dx = du$

$\Rightarrow \int e^{u} du = e^{u} + c = e^{\sin x} + c$ elde edilir

! UYARI :

1) Değişken değişimi yapıldığında yazılan yeni integralde eski değişken olmamalıdır. Tüm ifadeler yeni değişken cinsinden yazılmalıdır.

2) Değişken değişimi yapılıp soru çözüldükten sonra ters değişim yapılarak cevap verilen ilk değişken cinsinden yazılmalıdır.

Örnek: $I = \int \frac{\sin(3\ln x)}{x}\,dx = ?$

Çözüm:

$$3\ln x = u \Rightarrow 3.\frac{1}{x}\,dx = du \Rightarrow \frac{1}{x}\,dx = \frac{du}{3}$$

$$I = \int \sin u . \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int \sin u\,du = -\frac{1}{3}\cos u + c$$

$$= -\frac{1}{3}\cos(3\ln x) + c$$

Örnek: $I=\int \frac{e^{2x}+e^{x}}{1+e^{2x}}\,dx = ?$

Çözüm:

$$I=\int \frac{e^{x}(e^{x}+1)}{1+(e^{x})^{2}}\cdot dx \qquad e^{x}=u \Rightarrow e^{x}dx=du$$

$$I=\int \frac{u+1}{1+u^{2}}\cdot du=\int \frac{u}{1+u^{2}}du+\int \frac{1}{1+u^{2}}du$$

$$1+u^{2}=t \Rightarrow 2u\,du=dt \qquad u\,du=\frac{dt}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t}+\int \frac{1}{1+u^{2}}du$$

$$I = \frac{1}{2} \ln t + \arctan u + c$$

$$= \frac{1}{2} \ln(1+u^2) + \arctan u + c \qquad , \; u = e^x$$

$$= \frac{1}{2} \ln(1+e^{2x}) + \arctan e^x + c$$

❗UYARI : Bazı integrallerde değişken değiştirme direk uygulanamaz. Bu nedenle bu tarz ifadeler önce düzenlenir, sonra uygun konuma gelince değişken değiştirme yapılır.

Örnek: $I=\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx=?$

$$I=\int \frac{1}{e^{x}\sqrt{1-e^{-2x}}}\,dx=\int \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{1-e^{-2x}}}$$

$$e^{-x}=u \Rightarrow -e^{-x}dx=du$$

$$=-\int \frac{du}{\sqrt{1-u^{2}}}=\arccos u+C$$

$$=\arccos(e^{-x})+c$$

Örnek! $I = \int \frac{\cos^3 x}{1+\sin x}\, dx = ?$

Çözüm!

$$I = \int \frac{\cos x \cos^2 x}{1+\sin x}\, dx = \int \frac{\cos x \,(1-\sin^2 x)}{1+\sin x}\, dx$$

" $\sin x = u \Rightarrow \cos x\, dx = du$ "

$$= \int \frac{1-u^2}{1+u}\, du = \int \frac{(1-u)\cancel{(1+u)}}{\cancel{1+u}}\, du$$

$$= \int (1-u)\, du = u - \frac{u^2}{2} + c$$

$$= \sin x - \frac{\sin^2 x}{2} + c$$

Örnek: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} = ?$

Çözüm:

$$3-2x-x^2 = 3-(x^2-2x) = 4-(x^2-2x+1) = 4-(x+1)^2$$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x+1)^2}} \qquad x+1=u \Rightarrow dx = du$$

$$= \int \frac{du}{\sqrt{4-u^2}} = \int \frac{du}{2\sqrt{1-\left(\frac{u}{2}\right)^2}} \qquad \frac{u}{2}=t \quad \frac{du}{2}=dt$$

$$= \int \frac{\cancel{2}dt}{\cancel{2}\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + c$$

$$= \arcsin \frac{u}{2} + c$$

$$= \arcsin \frac{x+1}{2} + c$$

Örnek: $I = \int x^2 \sqrt{x-2}\, dx = ?$

Çözüm:

$$x-2=t \qquad dx=dt$$
$$x=t+2$$

$$I = \int (t+2)^2 \sqrt{t}\, dt = \int (t^2+4t+4)\, t^{1/2}\, dt$$

$$= \int \left(t^{5/2} + 4t^{3/2} + 4t^{1/2}\right) dt$$

$$= \frac{2}{7} t^{7/2} + 4 \cdot \frac{2}{5} t^{5/2} + 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot t^{3/2} + c$$

$$= \frac{2}{7}(x-2)^{7/2} + \frac{8}{5}(x-2)^{5/2} + \frac{8}{3}(x-2)^{3/2} + c$$

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Dr. Öğretim Üyesi Fatma GÜLER

Temel Bilim Dersleri
Matematik II

Belirsiz İntegral

Ders 5