ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Fonsiyonun
Ekstremum Değerleri

Dr. Öğretim Üyesi Fatma GÜLER

Ders 2

ARTAN VE AZALAN FONKSİYONLAR

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $[a,b]$ de sürekli , (a,b) de türevlenebilir ise ortalama değer teoreminden

$$f(b)-f(a) = (b-a)\, f'(c)$$ yazılabilir.

$x_1 < x_2$ olmak üzere $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ alalım. O halde f fonksiyonu $[x_1, x_2]$ aralığında ortalama değer teo. şartlarını sağladığından $f(x_2)-f(x_1) = (x_2-x_1)\, f'(c)$ olur. Böylece (x_1, x_2) aralığında $f'(c)>0$ ise $f(x_1)<f(x_2)$ olup fonksiyon artan, $f'(c)<0$ ise $f(x_1)>f(x_2)$ olup fonksiyon azalan olur.

Böylece fonksiyonun türevinin pozitif olduğu yerlerde f artan fonksiyon, f nin türevinin negatif olduğu yerlerde f azalan fonksiyon olur. Bu sonuç sonlu olmayan aralıklar için de geçerlidir.

Örnek: $f(x) = x^3 - 12x - 5$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu yerleri bulunuz.

Çözüm:

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \qquad x = \mp 2$$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Artan olduğu küme $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

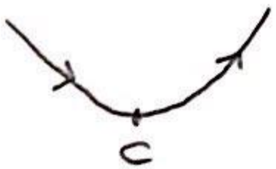
Azalan olduğu küme $(-2, 2)$ olur.

Yerel Ekstremumların Belirlenmesinde Artanlık Azalanlık İlişkisi

f fonksiyonunun bir ekstremum noktası c ise c noktasının maksimum veya minimum nokta olup olmadığını c noktasının solunda ve sağında fonksiyonun artan ve azalanlık karakterine bakarak anlayabiliriz.

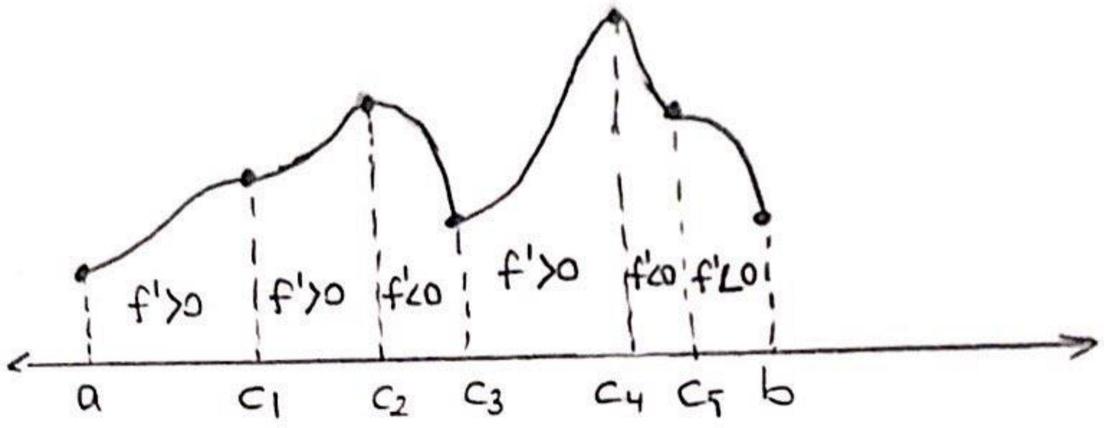
1) f fonksiyonu c noktasının solunda artan, sağında azalan ise c yerel maksimum noktadır.

2) f fonksiyonu c noktasının solunda azalan sağında artan ise c noktası yerel minimum noktadır.



1 ve 2 dikkate alınırsa ekstremum noktada fonksiyonun türevi işaret değiştirmelidir. Böylece f' fonksiyonu c noktasında negatiften pozitife geçmişse c yerel minimum ; pozitiften negatife geçmiş ise c yerel maksimum noktadır.

Buna göre eğer f' türev fonksiyonunun grafiği verilirse ekstremum noktaları ve türlerini belirleyebiliriz. Buna yerel ekstremumlar için Birinci türev testi denir.



Grafiğe göre a noktası mutlak minimum noktası c_4 noktası mutlak maksimum noktasıdır.

c_1 ve c_5 noktasında f' türev fonksiyonu işaret değiştirmediğinden ekstremum yoktur.

c_2 noktasında $f'(c_2)=0$ ve f' işaret değiştirir, artanlıktan azalanlığa geçer o halde c_2 yerel maksimum,

c_3 noktasında $f'(c_3)=0$ ve f' azalanlıktan artanlığa geçer o halde c_3 yerel minimum.

b noktasına sadece soldan bakılır, yerel minimum vardır.

Örnek: $f:[0,2\pi]\to \mathbb{R}$, $f(x)=x-\sin 2x$ fonksiyonunun ekstremumlarını bulunuz.

Çözüm:

$$f'(x)=1-2\cos 2x=0 \Rightarrow \cos 2x=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$$

I. ve IV. bölge $\quad 2x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \;\vee\; 2x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$x=\frac{\pi}{6}+k\pi \;\vee\; x=-\frac{\pi}{6}+k\pi \qquad Ç.K=\left\{\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right\}$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
	y.maks	$\searrow$	y.min	$\nearrow$	y.maks	$\searrow$	y.min	$\nearrow$	y.maks	$\searrow$	y.min

$f(0)=0$ $\quad f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{5\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\quad f\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\frac{7\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$f\left(\frac{11\pi}{6}\right)=\frac{11\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$f(2\pi)=2\pi$

$x=\frac{\pi}{6}$ mutlak min nokta

$x=\frac{11\pi}{6}$ mutlak maks. nokta

Örnek: $f(x)=x^2$ nin $[-2,1]$ aralığında mutlak maksimum ve mutlak minimum değerleri?

Çözüm:

$$f'(x)=2x=0 \qquad x=0$$

x		0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
	$\searrow$		$\nearrow$

Ayrıca uç noktalara bakılır

$f(0)=0$, $f(-2)=4$, $f(1)=1$

O halde $x=0$ mutlak min. noktası, $x=-2$ mutlak maks.

$f(0)=0$ mutlak min. değeri

$f(-2)=4$ 〃 maks. değeri

Örnek: $f(x)=x^{2/3}$ ün $[-2,3]$ aralığında mutlak ekstremumları,

$$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-1/3}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

türevin kökleri yok. f' nin tanımsız olduğu nokta 0 ve uç noktalara bakalım.

$f(0)=0 \quad f(-2)=\sqrt[3]{4} \quad f(3)=\sqrt[3]{9}$

$x=0$ mutlak minimum noktası

$x=3$ mutlak maksimum "

Örnek: $g(x)=8x-x^4$ ün $[-2,1]$

$g'(x)=8-4x^3=0 \quad x=\sqrt[3]{2}>1$ tanım kümesine ait olmayan nokta, O halde mutlak ekstremumlar uç noktalarda olur.

$g(-2)=-32 \quad g(1)=7$

$x=1$ mutlak maks. $\quad x=-2$ mutlak min.

Örnek! $g(x) = 8x - x^4$ fonksiyonunun $[-2,1]$ aralığındaki ekstremumları?

Çözüm!

$$g'(x) = 8 - 4x^3 = 0 \qquad x^3 = 2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2} > 1$$

tanım kümesine ait olmayan nokta

Dolayısıyla mutlak ekstremumlar uç noktalarda aranır.

$g(-2) = -32$ $\qquad$ $x=-2$ mutlak maks. noktası

$g(1) = 7$ $\qquad$ $x=1$ mutlak min. noktası.

Yerel Ekstremumlar için İkinci Türev Testi

f fonksiyonu ikinci mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon ve c noktası kritik nokta olsun. ($f'(c)=0$ olsun). Yine f'' fonksiyonunun c noktasını içeren bir açık aralıkta sürekli olduğunu kabul edelim. Bu durumda

* $f''(c)<0$ ise c noktası yerel maksimum nokta
* $f''(c)>0$ ise c noktası yerel minimum noktadır.
* Eğer $f''(c)=0$ olursa bu test cevap vermez.

Örnek: $f(x)=x^4-4x^3+10$ fonksiyonunun yerel ekstremumlarını inceleyelim.

Çözüm:

$f'(x)=4x^3-12x^2=0 \Rightarrow 4x^2(x-3)=0$ $\quad x_1=x_2=0$, $x_3=3$

kritik noktalardır.

$f''(x)=12x^2-24x$

$f''(0)=0$ olduğundan $x=0$ için birşey söyleyemeyiz

$f''(3)=36>0$ olduğundan $x=3$ yerel minimum noktadır

x	$-\infty$		0		3		∞
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

f'nin işaret tablosundan, $x=3$ yerel minimum nokta ve $x=0$ ekstremum nokta değildir.

Örnek; $f(x)=\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{4}+7$ fonksiyonunun yerel ekstremum

$f'(x)=x^4-x^3=0$ $\quad x=0 \quad x=1$ kritik noktalar

$f''(x)=4x^3-3x^2$

$f''(0)=0$ birşey söylenemez,

$f''(1)=1>0$ $\quad x=1$ yerel min. nokta.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Tablodan $x=0$ noktası yerel maks. noktadır.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Dr. Öğretim Üyesi Fatma GÜLER

Temel Bilim Dersileri
Matematik II

Artan ve Azalan Fonksiyonlar

Ders 2