UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

DİFERANSİYEL GEOMETRİ I

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 17

E^3 ÖKLİD UZAYINDA EĞRİLER

Bir Eğrinin Frenet 3-ayaklısı

$M \subset E^3$ eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi olsun. $\{T(s), N(s), B(s)\}$ ortonormal sistemine M eğrisinin $\alpha(s) \in M$ deki Frenet 3-ayaklısı veya Frenet çatısı denir. Bu sistemdeki her bir vektöre de Frenet vektörü adı verilir.

$$\begin{cases} T(s) = \alpha'(s) \\ N(s) = \dfrac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)} \\ B(s) = T(s) \wedge N(s) \end{cases}$$

formülleri ile bulunur. T ye α eğrisinin teğet vektör alanı, N ye asli normal vektör alanı ve B ye de binormal vektör alanı denir.

Örnek: $\alpha: \mathbb{R} \to E^3$, $\alpha(s) = \left(a\cos\frac{s}{c}, a\sin\frac{s}{c}, \frac{bs}{c}\right)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $c = \sqrt{a^2+b^2}$

eğrisinin Frenet 3-ayaklısını bulunuz.

Çözüm:

$$\alpha'(s) = \left(-\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c}, \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c}, \frac{b}{c}\right) \Rightarrow \|\alpha'(s)\| = \frac{a^2+b^2}{c^2} = 1$$

$\Rightarrow s \in I$ yay parametresidir.

$$T(s) = \alpha'(s), \quad N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}, \quad B(s) = T(s) \wedge N(s)$$

$$\Rightarrow T(s) = \left(-\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c}, \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c}, \frac{b}{c}\right)$$

$$\alpha''(s) = \left(-\frac{a}{c^2}\cos\frac{s}{c}, -\frac{a}{c^2}\sin\frac{s}{c}, 0\right) \Rightarrow \|\alpha''(s)\| = \frac{a}{c^2}$$

$$\Rightarrow N(s) = \left(-\cos\frac{s}{c}, -\sin\frac{s}{c}, 0\right)$$

$$B(s) = T(s) \wedge N(s) = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ -\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c} & \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c} & \frac{b}{c} \\ -\cos\frac{s}{c} & -\sin\frac{s}{c} & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{b}{c}\sin\frac{s}{c}, -\frac{b}{c}\cos\frac{s}{c}, \frac{a}{c}\right)$$

Herhangi parametre için Frenet 3-ayaklısının hesaplanması

Eğer M eğrisi yay parametreli verilmemiş ise bu durumda eğrinin yay parametreli olacak şekilde bir koordinat komşuluğu bulunabilir. Fakat her zaman eğrinin yay parametreli hale getirilmesi kolay olmayabilir. Bu durumda Frenet vektörleri şu şekilde hesaplanır:

$t \in I$, M eğrisi için yay-parametresi değil ise o zaman $\{T(t), N(t), B(t)\}$ Frenet 3-ayaklısı için,

$$\begin{cases} T(t) = \dfrac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \\[2ex] N(t) = B(t) \wedge T(t) \\[2ex] B(t) = \dfrac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|} \end{cases}$$

dir.

Örnek: $\alpha : \mathbb{R} \to E^3$, $\alpha(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$ eğrisinin Frenet 3-ayaklısını bulunuz.

Çözüm:

$\alpha'(t) = (3 - 3t^2, 6t, 3 + 3t^2) \Rightarrow \|\alpha'(t)\| = \sqrt{18}\,(1+t^2) \neq 1$ olup $t \in I$ yay-parametresi değildir.

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\,(1+t^2)}\,(1-t^2, 2t, 1+t^2)$$

$\alpha''(t) = 6(-t, 1, t)$, $\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) = 18(-1+t^2, -2t, 1+t^2)$

$\Rightarrow \|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\| = 18\sqrt{2}\,(1+t^2)$ olur.

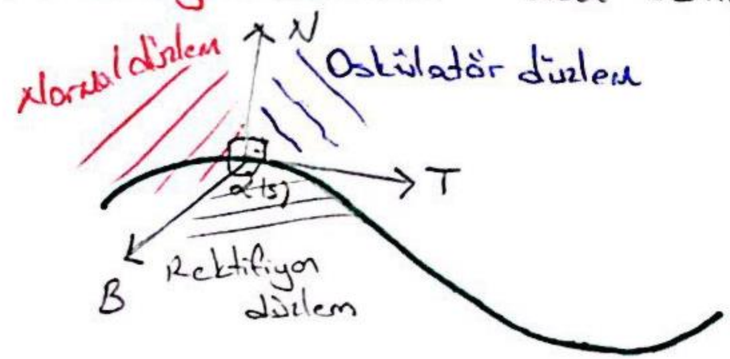
$$\Rightarrow B(t) = \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\,(1+t^2)}\,(-1+t^2, -2t, 1+t^2)$$

$N(t) = B(t) \wedge T(t) = \dfrac{1}{1+t^2}\,(-2t, 1-t^2, 0)$ bulunur.

Bir Eğrinin Oluşturduğu Özel Düzlemler

$M \subset E^3$ eğrisinin $\alpha(s) \in M$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{T(s), N(s), B(s)\}$ olsun.

* $T(s)$ ve $N(s)$ vektörlerinin oluşturduğu düzleme M nin $\alpha(s)$ noktasındaki oskülatör düzlemi,
* $N(s)$ ve $B(s)$ vektörlerinin oluşturduğu düzleme M nin $\alpha(s)$ noktasındaki normal düzlemi,
* $T(s)$ ve $B(s)$ vektörlerinin oluşturduğu düzleme M nin $\alpha(s)$ noktasındaki rektifiyan düzlemi adı verilir.



Oskülatör düzlemin normalinin B, normal düzlemin normalinin T ve rektifiyan düzlemin normalinin de N olduğuna dikkat ediniz.

Örnek: $\alpha(s)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\sqrt{2}s,-1,-\cos\sqrt{2}s\right)$ eğrisinin $\alpha(0)$ noktasındaki oskülatör, normal ve rektifiyan düzlemlerinin denklemlerini bulunuz.

Çözüm:

$\alpha'(s)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2}\cos s,0,\sqrt{2}\sin s\right) \Rightarrow \|\alpha'(s)\|=\frac{1}{2}\cdot 2=1 \Rightarrow s\in I$ yay-parametresidir.

$T(0)=\alpha'(0)=(1,0,0)$

$\alpha''(s)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\sqrt{2}\sin s,0,\sqrt{2}\cos s\right) \Rightarrow \alpha''(0)=(0,0,1)$

$$N(0)=\frac{\alpha''(0)}{\|\alpha''(0)\|}=(0,0,1)$$

$B(0)=T(0)\wedge N(0)=(0,-1,0)$

Oskülatör düzlemin normali $B(0)$ olduğundan denklemi $0x+(-1)y+0z+d=0$ dır. $\alpha(0)=\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ noktasından geçeceğinden $d=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ olup $y+\frac{\sqrt{2}}{2}=0$ dır. Benzer şekilde normal düzlem $x=0$, rektifiyan düzlem $z+\frac{\sqrt{2}}{2}=0$ bulunur.

Eğrilikler

$M \subset E^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere M nin $\alpha(s) \in M$ deki Frenet 3-ayaklısı $\{T(s), N(s), B(s)\}$ olsun.

$k_1(s) = \kappa(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle$ sayısına M nin $\alpha(s)$ deki 1. eğriliği veya sadece eğriliği, $k_2(s) = \tau(s) = \langle N'(s), B(s) \rangle$ sayısına da M nin $\alpha(s)$ deki 2. eğriliği veya burulması denir.

Örnek: $\alpha(s) = \left(a\cos\frac{s}{c}, a\sin\frac{s}{c}, \frac{bs}{c}\right)$, $c = \sqrt{a^2+b^2}$, $a, b \in \mathbb{R}$, eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğrilik ve burulmasını bulunuz.

Çözüm:

$s \in I$ yay parametresi olup $T(s) = \left(-\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c}, \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c}, \frac{b}{c}\right)$,
$N(s) = \left(-\cos\frac{s}{c}, -\sin\frac{s}{c}, 0\right)$, $B(s) = \left(\frac{b}{c}\sin\frac{s}{c}, -\frac{b}{c}\cos\frac{s}{c}, \frac{a}{c}\right)$ dir.

Böylece,

$\kappa(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle = \frac{a}{c^2}$, $\tau(s) = \langle N'(s), B(s) \rangle = \frac{b}{c^2}$ bulunur.

E^3 de bir eğri için Frenet formülleri

$M \subset E^3$ eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. M nin $\alpha(s) \in M$ deki Frenet 3-ayaklısı $\{T(s), N(s), B(s)\}$, eğriliği $\kappa(s)$ ve burulması da $\tau(s)$ olmak üzere

$$\begin{cases} T'(s) = \kappa(s) N(s) \\ N'(s) = -\kappa(s) T(s) + \tau(s) B(s) \\ B'(s) = -\tau(s) N(s) \end{cases}$$

yazılabilir. Bu formüllere M eğrisi için Frenet formülleri adı verilir.

Formüllerin elde edilişi: $s \in I$ yay-parametresi olduğundan,

$$T(s) = \alpha'(s) \Rightarrow T'(s) = \alpha''(s) \quad \ldots (*)$$

$$\kappa(s) N(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle N(s)$$

$$= \left\langle \alpha''(s), \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} \right\rangle \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$

$$= \frac{1}{\|\alpha''(s)\|^2} \langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle \alpha''(s) = \alpha''(s) \quad \ldots (**)$$

$(*)$ ve $(**)$ dan $\boxed{T'(s) = \kappa(s) N(s)}$ bulunur.

$\{T(s), N(s), B(s)\}$ $\chi(E^3)$ için baz olduğundan

$$N'(s) = \lambda_1 T(s) + \lambda_2 N(s) + \lambda_3 B(s)$$ yazılabilir. $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq 3$.

$\langle N(s), N(s) \rangle = 1$ olduğundan $\langle N'(s), N(s) \rangle = 0 = \lambda_2$ olur.

$\langle N'(s), B(s) \rangle = \tau(s) = \lambda_3$ dır.

$$\langle N'(s), T(s) \rangle = \lambda_1 \quad \ldots \text{①}$$

$$\langle T(s), N(s) \rangle = 0 \Rightarrow \underbrace{\langle T'(s), N(s) \rangle}_{\kappa(s)} + \langle T(s), N'(s) \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle T(s), N'(s) \rangle = -\kappa(s) \quad \ldots \text{②}$$

① ve ② den $\lambda_1 = -\kappa(s)$ olur.

$\lambda_1 = -\kappa(s)$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = \tau(s)$ değerleri yukarıda yerine yazılırsa,

$\boxed{N'(s) = -\kappa(s) T(s) + \tau(s) B(s)}$ bulunur.

$B(s) = T(s) \wedge N(s)$ olduğundan $B'(s) = T'(s) \wedge N(s) + T(s) \wedge N'(s)$ dir.

$$\Rightarrow B'(s) = \kappa(s) \underbrace{N(s) \wedge N(s)}_{0} + T(s) \wedge \left(-\kappa(s) T(s) + \tau(s) B(s)\right)$$

$$\Rightarrow B'(s) = \tau(s)\, T(s) \wedge B(s) = \tau(s)\left(-N(s)\right) \Rightarrow \boxed{B'(s) = -\tau(s) N(s)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T'(s) = \kappa(s) N(s) \\ N'(s) = -\kappa(s) T(s) + \tau(s) B(s) \\ B'(s) = -\tau(s) N(s) \end{cases}$$

Bu formüller matris formunda yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix}$$ elde edilir.

Frenet Elemanları: M, E^3 de birim hızlı eğri olsun. T, N, B vektör alanları ile κ, τ fonksiyonlarının herbirine M nin Frenet elemanları denir.

Sonuç: Eğer eğri yay parametresi ile verilmiş ise eğrilikler ile ilgili olarak aşağıdaki formüller verilebilir:

$T'(s) = \kappa(s) N(s)$ den $|\kappa(s)| = \|T'(s)\|$ dır. Ayrıca;

$\kappa(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle = \langle \alpha''(s), \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} \rangle = \|\alpha''(s)\|$ olacağından $\kappa(s) \geq 0$ dır.

O halde, $|\kappa(s)| = \|T'(s)\|$ den $\boxed{\kappa(s) = \|T'(s)\|}$ bulunur.

$B'(s) = -\tau(s) N(s)$ den $\boxed{|\tau(s)| = \|B'(s)\|}$ elde edilir.

Eğrilik ve Burulmanın Geometrik Anlamı

Teorem 20. E^3 de (I,α) koordinat komşuluğu ile verilen bir M eğrisinin parametresi yay-parametresi ise eğrinin bir doğru olması için gerek ve yeter şart, $\kappa = 0$ olmasıdır.

İspat:

$(\Rightarrow)$ α eğrisi $B \in E^3$ noktasından geçen ve doğrultmanı $A \in E^3$ olan bir doğru olsun. Bu durumda,

$$\alpha : I \to E^3$$
$$s \to \alpha(s) = As + B \quad \text{dir.}$$

$$\Rightarrow \alpha'(s) = A = \text{sabit} \Rightarrow T(s) = A \Rightarrow T'(s) = 0 \Rightarrow T'(s) = \kappa N(s) = 0$$

$$\Rightarrow \langle \kappa N(s), N(s) \rangle = \langle 0, N(s) \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \kappa \langle N(s), N(s) \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \kappa = 0$$

($\Leftarrow$) $\kappa=0$ olsun. $s\in I$ yay-parametresi olduğundan Frenet Formüllerinden,

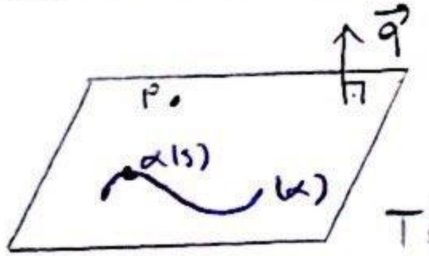
$$T'(s)=\kappa N(s)=0 \Rightarrow T(s)=A=\text{sabit} \Rightarrow \alpha'(s)=A=\text{sabit}$$
$$\Rightarrow \alpha(s)=As+B \text{ olur.}$$

Bu ise B noktasından geçen ve doğrultmanı A olan bir doğru denklemidir.

Teorem 21. E^3 de (I,α) koordinat komşuluğu ile verilen bir M eğrisinin $s\in I$ yay-parametresi olsun. M nin düzlemsel bir eğri olması için gerek ve yeter şart $\tau=0$ olmasıdır.

İspat:

($\Rightarrow$) α düzlemsel bir eğri olsun. α nın P noktasından geçen ve normali $\vec{q}$ olan düzlemde yattığını kabul edelim.



$$\Rightarrow \langle \alpha(s)-P, \vec{q}\rangle=0 \quad \text{olur.}$$

Türev alınırsa $\langle \alpha'(s), \vec{q}\rangle=0 \Rightarrow \langle T(s), \vec{q}\rangle=0 \Rightarrow \vec{q}\perp T$

Tekrar türev alınırsa $\langle \alpha''(s), \vec{q}\rangle=0 \Rightarrow \vec{q}\perp N \quad \left(N=\frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}\right)$

$N \perp \vec{q}$ ve $T \perp \vec{q}$ olduğundan $\vec{q} \parallel B$ dir.

$\Rightarrow B(s) = \mp \dfrac{\vec{q}}{\|\vec{q}\|} \Rightarrow B'(s) = 0 \Rightarrow -\tau N = 0 \Rightarrow \tau = 0$ dır.

($\Leftarrow$) $\tau = 0$ olsun. α eğrisinin düzlemsel eğri olduğunu gösterelim: α nın $\alpha(0)$ noktasından geçen ve normali $B(s)$ olan düzlemde yattığını göstereceğiz. $\tau = 0$ olduğundan $B'(s) = -\tau N(s) = 0$ dır.

$f(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(0), B(s) \rangle$ fonksiyonunu tanımlayalım. Eğer $f(s) = 0$ olduğunu gösterirsek α eğrisi $\alpha(0)$ dan geçen ve normali $B(s)$ olan düzlemde yatıyor demektir. f nin tanımından $f(0) = 0$ dır. Ayrıca;

$$f'(s) = \langle \alpha'(s), B(s) \rangle + \langle \alpha(s) - \alpha(0), B'(s) \rangle = 0$$

$\Rightarrow f(s) = c = \text{sabit}$ olur. $f(0) = 0$ olduğundan $c = 0$ dır.

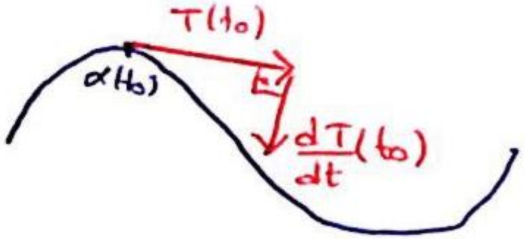
$\Rightarrow f(s) = 0 \Rightarrow \langle \alpha(s) - \alpha(0), B(s) \rangle = 0$ dır.

Bu ise $\alpha(s)$ noktalarının $\alpha(0)$ dan geçen ve normali B olan düzlemde (oskülatör düzlemde) olması demektir. O halde α eğrisi düzlemseldir.

Açıklama: Kıvrımlı bir yol boyunca giden bir araba düşünelim. Yolun kıvrımı ne kadar keskin olursa sürüş de o kadar zor olacaktır. Matematikte bu keskin kıvrımı eğrilik ile tanımlarız. Eğriliğin sıfır olduğu noktada eğri bir çizgi gibi görünür. Eğrilik ne kadar fazla ise eğri o noktada keskin şekilde bükülür.

O halde eğrilik eğrinin bir doğrudan ne kadar saptığının bir ölçüsüdür. Başka bir deyişle bir eğrinin bir noktadaki eğriliği o noktasındaki değişimin ne kadar değiştiğinin ölçüsüdür. Yani yay parametreli bir eğri için eğrilik eğrinin belirli bir noktada ikinci türevinin büyüklüğüdür. ($\kappa(s) = \|\alpha''(s)\|$)

$\kappa = \left\| \frac{dT}{ds} \right\|$ dir. T nin türevi birim teğet vektörünün zaman içinde nasıl değiştiğini gösterir. Birim teğet vektör olduğundan uzunluk değişmez. Sadece yönü değişecektir.



Belirli bir t_0 anında $\frac{dT}{dt}(t_0)$ vektörünün $T(t)$ vektörünün ucunda durduğunu düşünebiliriz. T nin uzunluğu sabit olduğundan türev vektörü T ye dik olacaktır. Türev vektörünün T yi çekerek hareket ettirdiğini düşünelim. Eğer türev vektörü uzunsa $\kappa = \left\| \frac{dT}{ds} \right\|$ olduğundan eğrinin eğriliği daha büyük olacak eğrinin yönü daha ani olarak değişecek yani daha küçük eğrilik yarıçapına sahip olacaktır. Tersine eğer türev vektörü kısaysa bu durum yumuşak bir dönüşe ve dolayısıyla küçük eğrilik anlamına gelen büyük bir eğrilik yarıçapına karşılık gelir.

Teorem 22. Eğer β, $\kappa > 0$ sabit eğrilikli ve $\tau = 0$ burulmalı birim hızlı bir eğri ise β, $\frac{1}{\kappa}$ yarıçaplı bir çember parçasıdır.

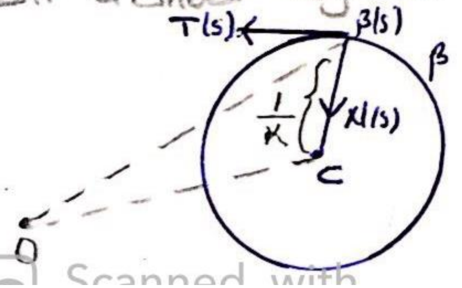
İspat:

$\tau = 0$ olduğundan β, düzlemsel bir eğridir. $\alpha(s) = \beta(s) + \frac{1}{\kappa} N(s)$ eğrisini alalım. Burada N, β eğrisinin asli normalidir.

$$\alpha'(s) = \beta'(s) + \frac{1}{\kappa} N'(s) = T(s) + \frac{1}{\kappa}\left(-\kappa T(s) + \tau N(s)\right) = 0 \Rightarrow \alpha(s) = c = \text{sabit}.$$

$$\Rightarrow c = \beta(s) + \frac{1}{\kappa} N(s) \Rightarrow c - \beta(s) = \frac{1}{\kappa} N(s)$$ bulunur. O halde

$$d(c, \beta(s)) = \| c - \beta(s) \| = \| \tfrac{1}{\kappa} N(s) \| = \frac{1}{\kappa} = \text{sabit}$$ olur. Bu ise $\beta(s)$ noktalarının c sabit noktasından $\frac{1}{\kappa}$ sabit uzaklığında bulunması demektir. Buna göre, $\beta(s)$ noktaların geometrik yeri yani β eğrisi, $\frac{1}{\kappa}$ yarıçaplı ve c merkezli bir çember veya bir çember parçasıdır.



$$c = \beta(s) + \frac{1}{\kappa} N(s)$$

Birim Hızlı Olmayan Eğrinin Eğrilik ve Burulması

$M \subset E^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $t \in I$ yay parametresi olmasın. Yani $\|\alpha'(t)\| = \left\| \frac{d\alpha}{dt} \right\| \neq 1$ olsun. Bu durumda M nin $\alpha(t)$ noktasındaki eğrilik ve burulması,

$$\boxed{\kappa(t) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}} \quad \text{ve} \quad \boxed{\tau(t) = \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t))}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2}} \quad \text{dir.}$$

Örnek: $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$ eğrisinin eğrilik ve burulmasını hesaplayınız.

Çözüm:

$$\alpha'(t) = (1, 2t, 3t^2) \Rightarrow \|\alpha'(t)\| = \sqrt{1+4t^2+9t^4} \neq 1 \Rightarrow t \in I \text{ herhangi parametredir.}$$

Yukarıdaki formüller kullanılırsa,

$$\kappa(t) = \frac{(4+36t^2+36t^4)^{1/2}}{(1+4t^2+9t^4)^{3/2}}, \quad \tau(t) = \frac{3}{1+9t^2+9t^4} \quad \text{elde edilir.}$$

Teorem 23 (Eğriler Teorisinin Temel Teoremi)

Yay uzunluğu s, eğriliği $\kappa(s)$ ve burulması da $\tau(s)$ olan bir tek α eğrisi vardır.

Örnek: α birim hızlı eğrisinin eğriliği $\kappa(s) \neq 0$ olsun. α nın burulmasının

$$\tau = \frac{\langle \alpha', \alpha'' \wedge \alpha''' \rangle}{\|\alpha''\|^2}$$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $T = \alpha' \Rightarrow \alpha'' = T' = \kappa N \Rightarrow \alpha''' = \kappa' N + \kappa(-\kappa T + \tau B)$

$$\Rightarrow \alpha''' = -\kappa^2 T + \kappa' N + \kappa\tau B$$

$$\alpha'' \wedge \alpha''' = \kappa N \wedge (-\kappa^2 T + \kappa' N + \kappa \tau B) = -\kappa^3 \underbrace{(N \wedge T)}_{-B} + \kappa\kappa' \underbrace{(N \wedge N)}_{0} + \kappa^2 \tau \underbrace{(N \wedge B)}_{T}$$

$$= \kappa^3 B + \kappa^2 \tau T$$

$\langle \alpha', \alpha'' \wedge \alpha''' \rangle = \langle T, \kappa^3 B + \kappa^2 \tau T \rangle = \kappa^2 \tau$, $\|\alpha''\|^2 = \kappa^2$ olup

$$\frac{\langle \alpha', \alpha'' \wedge \alpha''' \rangle}{\|\alpha''\|^2} = \frac{\kappa^2 \tau}{\kappa^2} = \tau$$ bulunur.

UZEM ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

DİFERANSİYEL GEOMETRİ I

3-Boyutlu Uzayda Eğriler

Ders 17