ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

DİFERANSİYEL GEOMETRİ I

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 15

PROBLEMLER

1) $\alpha: I \to E^3$, $\alpha(t) = (2\cos^2 t, \sin 2t, 2\sin t)$ eğrisinin t parametresinin yay parametresi olmadığını gösteriniz. $t = \frac{\pi}{4}$ noktasındaki hız vektörünü bulunuz.

Çözüm:

$$\alpha'(t) = \left(-4\cos t \sin t, 2\cos 2t, 2\cos t\right) = \left(-2\sin 2t, 2\cos 2t, 2\cos t\right)$$

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{4\sin^2 2t + 4\cos^2 2t + 4\cos^2 t} = \sqrt{4 + 4\cos^2 t} \neq 1$$

$\Rightarrow t \in I$ yay parametresi değildir.

$t = \frac{\pi}{4}$ deki hız vektörü $\alpha'(\pi/4) = (-2, 0, \sqrt{2})$ olur.

2) $\alpha: I \to E^3$, $\alpha(t) = (2\cos^2 t, \sin 2t, 2\sin t)$ eğrisi ve $h(s) = \arcsin s$ ile tanımlı $h: \hat{J} \to I$ parametre değişimi için eğriyi $(\hat{J}, \beta)$ ile ifade ediniz.

Çözüm:

$$\beta(s) = \alpha(h(s)) = \alpha(\arcsin s) = \left(2\cos^2(\arcsin s), \sin 2(\arcsin s), 2\sin(\arcsin s)\right)$$

$$= \left(2 - 2s^2, 2s\sqrt{1-s^2}, 2s\right)$$

bulunur.

3) $\alpha(0)=(1,0,-5)$ ve $\alpha'(t)=(t^2,t,e^t)$ olan $\alpha: I \to E^3$ eğrisini bulunuz.

Çözüm:

$\alpha: I \to E^3$, $\alpha(t)=(\alpha_1(t),\alpha_2(t),\alpha_3(t))$

$\alpha'(t)=(\alpha_1'(t),\alpha_2'(t),\alpha_3'(t))$

$\alpha'(t)=(t^2,t,e^t)$ olduğundan $\alpha_1'(t)=t^2 \Rightarrow \alpha_1(t)=\frac{t^3}{3}+c_1$

$\alpha_2'(t)=t \Rightarrow \alpha_2(t)=t^2/2+c_2$

$\alpha_3'(t)=e^t \Rightarrow \alpha_3(t)=e^t+c_2$

$\alpha(0)=(1,0,-5)$ olduğundan $\alpha_1(0)=1, \alpha_2(0)=0, \alpha_3(0)=-5$

$\Rightarrow c_1=1,\ c_2=0,\ c_3=-6$

$\Rightarrow \alpha(t)=(t^3/3+1,\ t^2/2,\ e^t-6)$ olur.

4) Parametrik ifadeleri $\alpha_1(t) = (t, 1+t^2, t)$, $\alpha_2(t) = (\sin t, \cos t, t)$ ve $\alpha_3(t) = (sht, cht, t)$ olan eğrilerin $t=0$ daki hız vektörlerini bulunuz. $t=0$ daki hız vektörleri, sırasıyla, V_{P_1} , V_{P_2} , V_{P_3} olmak üzere $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2$ için $V_{P_i}[f]$, $i=1,2,3$ değerlerini bulunuz.

Çözüm:

$$\alpha_1'(t) = (1, 2t, 1) \Rightarrow \alpha_1'(0) = V_{P_1} = (1,0,1)$$

$$\alpha_2'(t) = (\cos t, -\sin t, 1) \Rightarrow \alpha_2'(0) = V_{P_2} = (1,0,1)$$

$$\alpha_3'(t) = (cht, sht, 1) \Rightarrow \alpha_3'(0) = V_{P_3} = (1,0,1)$$

$$V_{P_1}[f] = 1 \cdot 2x|_{P_1} + 0 \cdot (-2y)|_{P_1} + 1 \cdot 2z|_{P_1}$$

$$= 2x(0,1,0) + 2z(0,1,0)$$

$$= 0$$

Benzer biçimde $V_{P_2}[f] = V_{P_3}[f] = 0$ dır.

5) $\alpha:(0,\pi)\to E^3$, $\alpha(t)=e^t(\cos t,\sin t,1)$ eğrisini yay parametresi ile ifade ediniz.

Çözüm:

$$\alpha'(t)=e^t(\cos t,\sin t,1)+e^t(-\sin t,\cos t,0)=e^t(\cos t-\sin t,\cos t+\sin t,1)$$

$\|\alpha'(t)\|=\sqrt{3}\,e^t$ olup $t\in I$ yay parametresi değildir.

α nın yay uzunluğu $s(t)=\int_0^t\|\alpha'(u)\|du=\int_0^t\sqrt{3}\,e^u du=\sqrt{3}\,e^t-\sqrt{3}$

$\Rightarrow e^t=\dfrac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow t=\ln\left(\dfrac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)$

$h:J\to I$, $h(s)=t$ parametre değişim fonksiyonu olmak üzere,

$$\beta(s)=\alpha(h(s))=\alpha(t)=\alpha\left(\ln\left(\frac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \beta(s)=\frac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\left(\cos\ln\left(\frac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right),\sin\ln\left(\frac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right),1\right)$$

bulunur.

6) $\alpha(t)=(a\cos t,\ a\sin t,\ bt)$, $a>0$, $b\neq 0$ eğrisinin $\alpha(0)$ noktasındaki teğet doğrusunun denklemini bulunuz.

Çözüm:

$\alpha'(t)=(-a\sin t,\ a\cos t,\ b) \Rightarrow \alpha'(0)=(0,a,b)$ teğet doğrusunun doğrultmanı

$\alpha(0)=(a,0,0)$ olup teğet doğrusu, $\dfrac{x-a}{0}=\dfrac{y-0}{a}=\dfrac{z-0}{b}=\lambda$ dır.

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

DİFERANSİYEL GEOMETRİ I

Problem Çözümü

Ders 15