ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

DİFERANSİYEL GEOMETRİ I

Prof. Dr. Emin KASAP

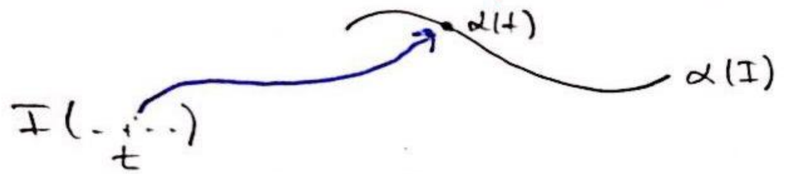
Ders 14

EĞRİLER TEORİSİ

Tanım: $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olsun. $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to E^n$

$$t \to \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_n(t))$$

dif.bilir fonksiyonu yardımıyla tanımlanan $\alpha(I) \subset E^n$ alt kümesine E^n de (I, α) koordinat komşuluğuyla tanımlanan bir eğri denir. $t \in I$ ya da eğrinin parametresi adı verilir.



Kısalık olsun diye $\alpha(I)$ eğrisi α ile gösterilecektir.

Eğri Örnekleri

Doğru: $\alpha : \mathbb{R} \to E^n$

$$t \to \alpha(t) = (p_1 + t v_1, p_2 + t v_2, \ldots, p_n + t v_n)$$ ile tanımlanan

$\alpha = \{\alpha(t) \mid t \in \mathbb{R}\} \subset E^n$ kümesi E^n de bir eğridir. Bu eğri, $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in E^n$ noktasından geçen ve doğrultmanı $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ olan bir doğrudur.

Çember: $I=\{t \mid 0\le t\le 2\pi\}$ olmak üzere $\alpha: I \to E^2$
$t \to \alpha(t)=(r\cos t, r\sin t)$

şeklinde tanımlı eğri E^2 de bir çemberdir.

Parabol: $\alpha: \mathbb{R} \to E^2$
$t \to \alpha(t)=(t,t^2)$ şeklinde tanımlı eğri E^2 de paraboldür.

Elips: $I=\{t \mid 0\le t\le 2\pi\}$ ve $a\neq b$ olmak üzere $\alpha: I \to E^2$
$t \to \alpha(t)=(a\cos t, b\sin t)$

$a,b\in\mathbb{R}$. Eğrisi E^2 de bir elipstir.

Hiperbol: $I=\{t\in\mathbb{R} \mid 0\le t\le \frac{\pi}{2} \text{ veya } \frac{\pi}{2}\le t\le \frac{3\pi}{2} \text{ veya } \frac{3\pi}{2}\le t\le 2\pi\}$
olmak üzere $\alpha: I \to E^2$, $\alpha(t)=(a\sec t, b\tan t)$, $a,b\in\mathbb{R}$ eğrisi E^2 de hiperboldür.

Bire_bir eğri

$\alpha: I \to E^3$ bir eğri olsun. Eğer α fonksiyonu 1:1 (bire_bir) ise eğriye 1:1 eğri denir. Bire_bir eğri, kendi kendini kesmeyen eğridir.

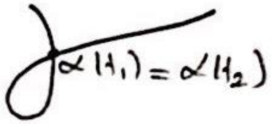
Bire_birliğin;

$\forall t_1,t_2 \in I$ için $t_1 \neq t_2 \Rightarrow \alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$ veya buna denk olarak,

$\forall t_1,t_2 \in I$ için $\alpha(t_1) = \alpha(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2$ şeklinde tanımlandığını biliyoruz.

Sonuç: α eğrisi 1:1 değilse $t_1,t_2 \in I$ için $t_1 \neq t_2$ iken $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)$ olur.

Yani eğri 1:1 olmadığı noktalarda kendini keser.

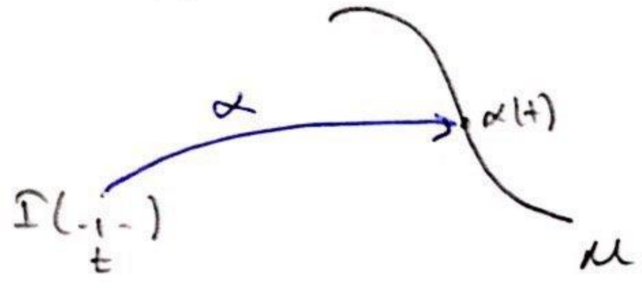


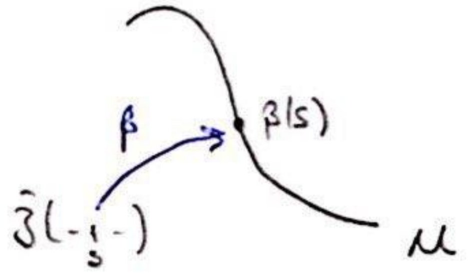
Periyodik eğri: $\alpha: I \to E^3$ bir eğri olsun. α fonksiyonu periyodik ise yani $\alpha(t+T)=\alpha(t)$ olacak şekilde $T>0$ sayısı varsa α ya periyodik eğri, Bu özelliği sağlayan en küçük T sayısına da eğrinin periyodu denir.

Örnek: $\alpha(t)=(a\cos t, a\sin t, 0)$, $a>0$ eğrisinin periyodu $T=2\pi$ dir.

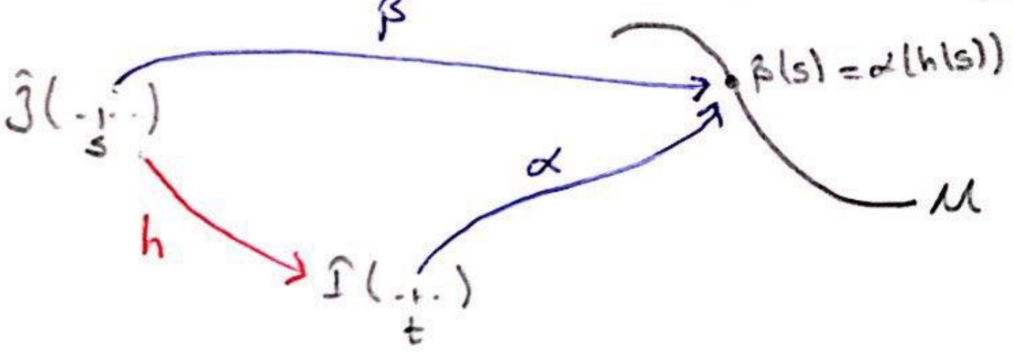
Eğriler için parametre değişimi

E^n de bir M eğrisi (I,α) ve $(\hat{J},\beta)$ gibi iki koordinat komşuluğu ile verilsin.





Bir reel değerli dif.bilir fonksiyon yardımıyla M nin I aralığındaki t parametresi ile $\hat{J}$ aralığındaki s parametresi değiştirilebilir:



$$h : \hat{J} \to I$$
$$s \to h(s) = t$$

fonksiyonuna

M için parametre değişim fonksiyonu veya parametre değişimi denir.

Not: I aralığı ve α fonksiyonu yardımıyla tanımladığımız bir M eğrisini parametre değişim fonksiyonu yardımıyla $\hat{J}$ aralığı ve β fonksiyonu yardımıyla tanımlayabiliriz.

Örnek: $\alpha : \hat{I} \to E^4$, $\alpha(t) = (\sqrt{t}, t\sqrt{t}, 1, -t)$ fonksiyonu ile tanımlanan $M = \{(\sqrt{t}, t\sqrt{t}, 1, -t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ eğrisi verilsin. $h : \hat{J} \to I$ parametre

$$s \to h(s) = s^2$$

değişim fonksiyonu yardımıyla aynı eğriyi β fonksiyonu ve $\hat{J}$ aralığını kullanarak elde edebiliriz:

$$\beta(s) = \alpha(h(s)) = \alpha(t) = \alpha(s^2) = (s, s^3, 1, -s^2) \text{ olmak üzere}$$

$\beta : \hat{J} \to E^4$, $\beta(s) = (s, s^3, 1, -s^2)$ fonksiyonu da aynı M eğrisini verir.

Eğriler için hız vektörü

E^n de bir M eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$\alpha : I \to E^n$$
$$t \to \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$$

olmak üzere $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t)}{\Delta t}$ limiti varsa bu limit değerine M nin $\alpha(t) \in M$ noktasındaki hız vektörü denir ve $\alpha'(t)\big|_{\alpha(t)}$ ile gösterilir.

Buna göre,

$$\alpha'(t)\Big|_{\alpha(t)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t)}{\Delta t}$$

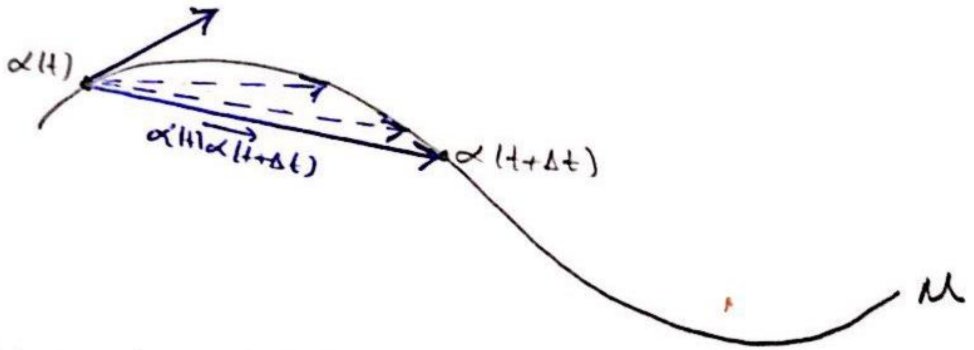
$$= \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\alpha_1(t+\Delta t) - \alpha_1(t)}{\Delta t}, \dots, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\alpha_n(t+\Delta t) - \alpha_n(t)}{\Delta t} \right)$$

$$= \left(\frac{d\alpha_1}{dt}\Big|_t, \frac{d\alpha_2}{dt}\Big|_t, \dots, \frac{d\alpha_n}{dt}\Big|_t \right)$$

dir.

Hız vektörünün geometrik anlamı

$\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t) = \overrightarrow{\alpha(t)\alpha(t+\Delta t)}$ vektörü $\alpha(t)$ den $\alpha(t+\Delta t)$ ye giden bir vektördür.



$\Delta t \to 0$ olduğunda $\alpha(t+\Delta)$ noktası $\alpha(t)$ noktasına doğru yaklaşır ve $\overrightarrow{\alpha(t)\alpha(t+\Delta t)}$ vektörü eğrinin $\alpha(t)$ noktasındaki teğeti konumunu alır. O halde eğrinin $\alpha(t)$ deki hız vektörü eğriye $\alpha(t)$ noktasında teğet olan bir vektördür. Nokta ve vektör ikilisi bir tanjant vektör ifade ettiğinden $\alpha'(t)\big|_{\alpha(t)}$ bir tanjant vektördür. Yani $\alpha'(t)\big|_{\alpha(t)} \in T_{E^n}(\alpha(t))$ dir.

Ayrıca, $\alpha' : M \to UT_M(\alpha(t))$

$$\alpha(t) \to \alpha'(\alpha(t)) = \alpha'(t)\Big|_{\alpha(t)}$$

olup $\alpha' \in \chi(M)$ dir. Bu vektör alanına eğrinin teğet vektör alanı adı verilir.

Örnek: $I = \{t \mid 0 < t \leq 2\pi,\ t \in \mathbb{R}\}$ için

$\alpha : I \to E^3$, $\alpha(t) = (a\cos t, b\sin t, bt)$, $a, b \in \mathbb{R}$ eğrisinin hız vektörü

$$\alpha'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b) \text{ dir.}$$

Teorem 18. $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) ve $(\hat{J}, \beta)$ koordinat komşuluğu ile verilsin. $h : \hat{J} \to I$ parametre değişim fonksiyonu olmak üzere hız vektörleri arasında $\beta'(s) = \frac{dh}{ds}\alpha'(h(s))$, $h(s) = t$, $s \in \hat{J}$ bağıntısı vardır.

İspat:

$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_n(t))$ olsun. $\beta(s) = \alpha(h(s))$ olduğundan

$\beta(s) = (\alpha_1(h(s)), \alpha_2(h(s)), \ldots, \alpha_n(h(s)))$ dir.

$$\Rightarrow \beta'(s) = \frac{d\beta}{ds} = \left(\frac{d\alpha_1}{dh}\cdot\frac{dh}{ds}, \frac{d\alpha_2}{dh}\cdot\frac{dh}{ds}, \ldots, \frac{d\alpha_n}{dh}\cdot\frac{dh}{ds}\right)$$

$$\Rightarrow \beta'(s) = \frac{dh}{ds}\left(\frac{d\alpha_1}{dh}, \frac{d\alpha_2}{dh}, \dots, \frac{d\alpha_n}{dh}\right)$$

$$= \frac{dh}{ds} \cdot \frac{d\alpha}{dh}$$

$$= h'(s) \cdot \alpha'(h(s)) \text{ olur.}$$

Sonuç: E^n de tanımlı bir M eğrisinin herhangi bir noktasında bir çok hız vektörü tanımlıdır. Ancak bu hız vektörleri lineer bağımlıdır.

Regüler eğri: $\forall t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$ ise α eğrisine regüler eğri denir.

Tanım: $\alpha : I \to E^n$ ile verilen bir M eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki hız vektörünün oluşturduğu uzaya M nin $\alpha(t)$ deki teğet uzayı veya tanjant uzayı denir. Bu uzay $T_M(\alpha(t))$ ile gösterilir. Buna göre $T_M(\alpha(t)) = \{\alpha'(t)|_{\alpha(t)} \mid t \in I\}$

Yukarıdaki sonuç gereğince boy $T_M(\alpha(t)) = 1$ olduğu açıktır.

Skalar hız: $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) ile verilsin.

$$\|\alpha'\| : I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \to \|\alpha'\|(t) = \|\alpha'(t)\|$$

fonksiyonuna skalar hız fonksiyonu, $\|\alpha'(t)\| \in \mathbb{R}$ sayısına da M nin $\alpha(t) \in M$ noktasındaki skalar hızı denir.

Örnek: $\alpha : \mathbb{R} \to E^3$; $\alpha(t) = (t, t^2, 2t)$ eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki skalar hızını bulalım: $\alpha'(t) = (1, 2t, 2) \Rightarrow \|\alpha'(t)\| = \sqrt{5 + 4t^2}$

Birim hızlı eğri: (I, α) koordinat komşuluğu ile verilen M eğrisi için $\forall s \in I$, $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise M ye birim hızlı eğri, $s \in I$ parametresine de yay-parametresi denir.

Örnek: $\alpha : I \to E^3$
$s \to \alpha(s) = (\cos s, \sin s, 0)$ eğrisi birim hızlı eğridir:

$\forall s \in I$ için $\alpha'(s) = (-\sin s, \cos s, 0) \Rightarrow \|\alpha'(s)\| = \sqrt{\sin^2 s + \cos^2 s} = 1$

Yay uzunluğu: $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $a, b \in I$ olmak üzere $\int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$ reel sayısına eğrinin $\alpha(a)$ ve $\alpha(b)$ noktaları arasındaki **yay uzunluğu** denir.

Not: Bir eğrinin iki noktası arasındaki yay-uzunluğu koordinat komşuluğundan bağımsızdır.

Teorem 19. E^n de bir regüler eğrinin birim hızlı olacak şekilde bir koordinat komşuluğu vardır. Yani, her regüler eğri yay parametresi ile ifade edilebilir.

İspat: M eğrisi (I, α) ile verilsin. M nin $\alpha(t_0)$ ve $\alpha(t)$ arasındaki yay uzunluğu,

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(u)\| du$$

dır. O halde yay uzunluğu fonksiyonu

$s : I \to \mathbb{R}$

$$t \to s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(u)\| du \quad \text{olur.}$$

$$\Rightarrow ds = \|\alpha'(t)\| dt \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \|\alpha'(t)\| \quad \text{bulunur.}$$

M nin bir diğer koordinat komşuluğu $(\hat{J}, \beta)$ olsun. $h : \hat{J} \to I$, $h(s) = t$ parametre değişim fonksiyonu olmak üzere,

$$\beta(s) = \alpha(h(s)) \text{ olup } \beta'(s) = h'(s) . \alpha'(h(s)) \quad , h(s) = t \quad \text{dir.}$$

$$\Rightarrow \beta'(s) = h'(s)\, \alpha'(t)$$

$$\Rightarrow \|\beta'(s)\| = \| \frac{dh}{ds} \alpha'(t)\|$$

$$= \left|\frac{dh}{ds}\right| . \|\alpha'(t)\|$$

$$= \left|\frac{dh}{ds}\right| . \frac{ds}{dt}$$

$h(s) = t$ olduğundan $dh = dt$

$$= \left|\frac{dt}{ds}\right| \frac{ds}{dt}$$

$$= 1 \text{ (norm pozitif olmalı)}$$

$\Rightarrow s \in I$, λ eğrisi için yay parametresidir.

Örnek: $\alpha: I \to E^3$, $\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ $a, b \in \mathbb{R}$ eğrisi verilsin. $t \in I$ nın α için yay parametresi olmadığını gösteriniz. Eğriyi yay parametreli olacak şekilde ifade ediniz.

Çözüm:

$\forall t \in I$ için $\alpha'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$ $\Rightarrow \|\alpha'(t)\| = \sqrt{a^2+b^2} \neq 1$

O halde $t \in I$ yay-parametresi değildir. Şimdi eğrinin yay-parametreli olacak biçimde başka bir koordinat komşuluğunu bulalım:

Yay uzunluğu $s(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\| du = \int_0^t \sqrt{a^2+b^2}\, du = \sqrt{a^2+b^2}\, t$

$\Rightarrow s = \sqrt{a^2+b^2}\, t \Rightarrow t = \dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$ olur. Eğrinin bir diğer koordinat komşuluğu (J, β) olsun. $h: J \to I$, $h(s) = t$ parametre değişim fonksiyonu için

$\beta(s) = \alpha(h(s)) = \alpha(t) = \alpha\left(\dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = \left(a\cos\dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin\dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \dfrac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ olur.

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

DİFERANSİYEL GEOMETRİ I

Eğriler Teorisine Giriş

Ders 14