ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

DİFERANSİYEL GEOMETRİ I

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 13

TÜREV DÖNÜŞÜMÜ

Tanım: $F: E^n \to E^m$ fonksiyonu verilsin.

$$P \to F(P) = (f_1(P), f_2(P), \ldots, f_m(P))$$

$f_i : E^n \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$, fonksiyonları diferansiyellenebilir ise $F: E^n \to E^m$ fonksiyonuna dif.bilir dönüşüm veya kısaca dönüşüm denir.

Tanım: $F: E^n \to E^m$ dönüşümü verilsin. $P \in E^n$ için

$$F_*|_P : T_{E^n}(P) \longrightarrow T_{E^m}(F(P))$$
$$\vec{V}_P \longrightarrow F_*|_P(\vec{V}_P) = \frac{d}{dt}(F(P+t\vec{V}))\Big|_{t=0}$$

fonksiyonuna F nin $P \in E^n$ deki türev dönüşümü denir.

Örnek: $F: E^3 \to E^3$, $F(x,y,z) = (x+y, x-y, 2z)$ dönüşümü verilsin. $\vec{V}_P \in T_{E^3}(P)$ için $F_*|_P(\vec{V}_P) = ?$

Çözüm:

$$F_*|_P(\vec{V}_P) = \frac{d}{dt}(F(P+t\vec{V}))\Big|_{t=0}$$

$$P+t\vec{v}=(P_1+tv_1,\ P_2+tv_2,\ P_3+tv_3)$$

$F(x,y,z)=(x+y,\ x-y,\ 2z)$ olduğundan

$$F(P+t\vec{v})=(P_1+tv_1+P_2+tv_2\ ,\ P_1+tv_1-P_2-tv_2\ ,\ 2P_3+2tv_3)$$

$$\frac{d}{dt}(F(P+t\vec{v}))=(v_1+v_2\ ,\ v_1-v_2\ ,\ 2v_3)$$

$$F_*|_P(\vec{V}_P)=\frac{d}{dt}(F(P+t\vec{v}))\Big|_{t=0}=(v_1+v_2\ ,\ v_1-v_2\ ,\ 2v_3)$$

$$=(v_1+v_2)\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_{F(P)}+(v_1-v_2)\frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_{F(P)}+2v_3\frac{\partial}{\partial x_3}\Big|_{F(P)}$$

Örnek: $F(u,v)=(u^2-v^2,\ 2uv)$ dönüşümü ve $\vec{V}_P\in T_{E^2}(P)$ için

$$F_*|_P(\vec{V}_P)=?$$

Teorem 16. $F=(f_1,f_2,\dots,f_m):E^n\to E^m$ bir dönüşüm olsun. $P\in E^n$ ve $\vec{V}_P\in T_{E^n}(P)$ için $F_*|_P(\vec{V}_P)=\sum_{i=1}^{m}\vec{V}_P[f_i]\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{F(P)}$ dir.

İspat:

$$F_*|_P(\vec{V}_P)=\frac{d}{dt}\left(F(P+t\vec{V})\right)\Big|_{t=0} \quad \text{idi.}$$

$$F(P+t\vec{V})=\left(f_1(P+t\vec{V}),\, f_2(P+t\vec{V}),\dots,f_m(P+t\vec{V})\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(F(P+t\vec{V})\right)\Big|_{t=0}=\left(\frac{d}{dt}f_1(P+t\vec{V})\Big|_{t=0},\,\frac{d}{dt}f_2(P+t\vec{V})\Big|_{t=0},\dots,\frac{d}{dt}f_m(P+t\vec{V})\Big|_{t=0}\right)$$

$$=\left(\vec{V}_P[f_1],\vec{V}_P[f_2],\dots,\vec{V}_P[f_m]\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\vec{V}_P[f_i]\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{F(P)}$$

olur.

Örnek: $F: E^2 \longrightarrow E^3$ dönüşümü veriliyor.

$$(x_1,x_2) \to F(x_1,x_2) = (x_1^2 - x_2^2,\ 2x_1x_2,\ x_1x_2^2)$$

$P \in E^2$ ve $\vec{V}_P = (1,0)_P$ için $F_*|_P(\vec{V}_P) = ?$

Çözüm:

$$F_*|_P(\vec{V}_P) = \sum_{i=1}^{3} \vec{V}_P[f_i] \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{F(P)} = (\vec{V}_P[f_1], \vec{V}_P[f_2], \vec{V}_P[f_3])$$

$f_1(x_1,x_2) = x_1^2 - x_2^2$, $f_2(x_1,x_2) = 2x_1x_2$, $f_3(x_1,x_2) = x_1x_2^2$ dir.

$$\vec{V}_P[f_1] = v_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\Big|_P + v_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\Big|_P = v_1\, 2x_1|_P + v_2(-2x_2)|_P = 2P_1$$

$\vec{V}_P[f_2] = 2P_2$, $\vec{V}_P[f_3] = P_2^2$ olur.

$$\Rightarrow F_*|_P(\vec{V}_P) = (2P_1, 2P_2, P_2^2)$$

$$= 2P_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_{F(P)} + 2P_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_{F(P)} + P_2^2 \frac{\partial}{\partial x_3}\Big|_{F(P)}$$ bulunur.

CS Scanned with

Teorem 17. $F: E^n \to E^m$ dönüşümünün $\forall p \in E^n$ noktasındaki $F_*|_p : T_{E^n}(p) \to T_{E^m}(F(p))$ türev dönüşümü regülerdir.

İspat:

$\forall \vec{V}_p, \vec{W}_p \in T_{E^n}(p)$ ve $\forall a,b \in \mathbb{R}$ için

$$F_*|_p(a\vec{V}_p + b\vec{W}_p) \stackrel{?}{=} aF_*|_p(\vec{V}_p) + bF_*|_p(\vec{W}_p)$$

$$F_*|_p(a\vec{V}_p + b\vec{W}_p) = \sum_{i=1}^{m} (a\vec{V}_p + b\vec{W}_p)[f_i] \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{F(p)}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(a\vec{V}_p[f_i] + b\vec{W}_p[f_i] \right) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{F(p)}$$

$$= a\sum_{i=1}^{m} \vec{V}_p[f_i] \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{F(p)} + b\sum_{i=1}^{m} \vec{W}_p[f_i] \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{F(p)}$$

$$= a\,F_*|_p(\vec{V}_p) + b\,F_*|_p(\vec{W}_p)$$

Scanned with

Türev Dönüşümünün Matrisi (Jakobien Matris)

$F: E^n \to E^m$ dönüşümünün $P \in E^n$ deki $F_*|_P : T_{E^n}(P) \to T_{E^m}(F(P))$ türev dönüşümü lineer olduğundan buna karşılık gelen matristen bahsedilebilir: $T_{E^n}(P)$ nin bir bazı $\phi = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_P, \frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_P, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_P \right\}$ ve $T_{E^m}(F(P))$ nin bir bazı da $\psi = \left\{ \frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_{F(P)}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_m}\Big|_{F(P)} \right\}$ olsun. Burada $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ E^n de ve $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ de E^m de Öklid koordinat sistemidir.

$$\begin{cases} F_*|_P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_P\right) = \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_P [f_i] \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_{F(P)} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\Big|_P \frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_{F(P)} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\Big|_P \frac{\partial}{\partial y_2}\Big|_{F(P)} + \dots + \frac{\partial f_m}{\partial x_1}\Big|_P \frac{\partial}{\partial y_m}\Big|_{F(P)} \\ F_*|_P\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_P\right) = \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_P [f_i] \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_{F(P)} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\Big|_P \frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_{F(P)} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\Big|_P \frac{\partial}{\partial y_2}\Big|_{F(P)} + \dots + \frac{\partial f_m}{\partial x_2}\Big|_P \frac{\partial}{\partial y_m}\Big|_{F(P)} \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ F_*|_P\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_P\right) = \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_P [f_i] \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_{F(P)} = \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\Big|_P \frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_{F(P)} + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\Big|_P \frac{\partial}{\partial y_2}\Big|_{F(P)} + \dots + \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\Big|_P \frac{\partial}{\partial y_m}\Big|_{F(P)} \end{cases}$$

Scanned with

$F_*|_p$ lineer dönüşümüne karşılık gelen matris, yukarıdaki katsayıların oluşturduğu matrisin transpozudur. Bu matris $(F_*|_p)_{\phi,\psi}$ veya $J(F,p)$ ile gösterilir Jakobien matris adını alır.

$$\Rightarrow J(F,p) = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_p & \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_p & \cdots & \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right|_p \\ \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_p & \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_p & \cdots & \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_n}\right|_p \\ \vdots & & & \\ \left.\frac{\partial f_m}{\partial x_1}\right|_p & \left.\frac{\partial f_m}{\partial x_2}\right|_p & \cdots & \left.\frac{\partial f_m}{\partial x_n}\right|_p \end{bmatrix}_{m\times n} \quad \text{dir.}$$

Örnek: $F: E^2 \to E^3$ dönüşümünün $P=(0,1)\in E^2$ noktasındaki

$(x_1,x_2) \to F(x_1,x_2) = (x_1, x_2, x_1 x_2)$ türev dönüşümünün matrisini bulunuz.

Çözüm:

$f_1(x_1,x_2) = x_1$, $f_2(x_1,x_2) = x_2$, $f_3(x_1,x_2) = x_1 x_2$ dir.

$$\hat{J}(F,P) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \end{bmatrix}_P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix}_P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ P_2 & P_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

Tanım: $F: E^n \to E^m$ dönüşümünün $\forall P \in E^n$ için $F_*|_P$ türev dönüşümü 1:1 ise F ye **regülerdir** denir.

Not: $F: E^n \to E^m$ için $F_*|_P$ 1:1 dir $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank}(\hat{J}(F,P)) = n$ dir.

Sonuç: $F: E^n \to E^m$ dönüşümü regülerdir $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank}(\hat{J}(F,P)) = n$ dir.

Örnek: $F: E^3 \to E^3$, $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \cos x_2, x_1 \sin x_2, x_3)$ dönüşümü regüler midir?

Çözüm: $P \in E^3$ için rank $\hat{J}(F, P) \stackrel{?}{=} 3$

$$\hat{J}(F,P) = \begin{bmatrix} \cos x_2 & -x_1 \sin x_2 & 0 \\ \sin x_2 & x_1 \cos x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_P$$

$$= \begin{bmatrix} \cos p_2 & -p_1 \sin p_2 & 0 \\ \sin p_2 & p_1 \cos p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det \hat{J}(F,P) = p_1$ olur. O halde $p_1 \neq 0$ olan $P = (p_1, p_2, p_3)$ noktalarında F regülerdir.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

DİFERANSİYEL GEOMETRİ I

Türev Dönüşümü

Ders 13