ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Dijital Ders Platformu

DİFERANSİYEL GEOMETRİ I

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 12

GRADİENT, DİVERGENS VE ROTASYONEL FONKSİYONLAR

1) Gradient Fonksiyonu

$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, E^n de bir Öklid koordinat sistemi olsun.

$\mathrm{Grad} = \nabla : C(E^n, \mathbb{R}) \longrightarrow \chi(E^n)$

$$f \longrightarrow \mathrm{Grad}\, f = \vec{\nabla} f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$$ ile tanımlı fonksiyona

gradient fonksiyonu denir.

$$\mathrm{Grad}\, f = \vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$ dir.

Teorem 13.

$\mathrm{Grad} = \nabla : C(E^n, \mathbb{R}) \rightarrow \chi(E^n)$ dönüşümü lineerdir.

İspat:

$\forall f, g \in C(E^n, \mathbb{R})$ ve $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için

$$\mathrm{Grad}(af + bg) = a\, \mathrm{Grad}\, f + b\, \mathrm{Grad}\, g$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$\mathrm{Grad}(af+bg)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(af+bg)}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(a\frac{\partial f}{\partial x_i}+b\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$=a\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}+b\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$=a\,\mathrm{Grad}f+b\,\mathrm{Grad}g$$

Not: $\vec{\nabla}f|_p\neq\vec{0}$ ise P noktasına regüler nokta, $\vec{\nabla}f|_p=\vec{0}$ ise p noktasına singüler nokta adı verilir.

2) Divergens Fonksiyonu

$X=\sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \chi(E^n)$, $f_i \in C(E^n, \mathbb{R})$, $1 \leq i \leq n$ olmak üzere,

$$\mathrm{div}: \chi(E^n) \longrightarrow C(E^n, \mathbb{R})$$
$$X \longrightarrow \mathrm{div}(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

fonksiyonuna divergens fonksiyonu denir.

$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ olmak üzere $\mathrm{div}(X) = \langle \nabla, X \rangle$ dir.

Teorem 14. Divergens fonksiyonu lineerdir.

İspat:

$\forall X, Y \in \chi(E^n)$ ve $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için

$$\mathrm{div}(aX+bY) = a\,\mathrm{div}(X) + b\,\mathrm{div}(Y)$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$X = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \text{ ve } Y = \sum_{i=1}^{n} g_i \frac{\partial}{\partial x_i} \text{ olsun.}$$

$$\Rightarrow aX + bY = \sum_{i=1}^{n} (af_i + bg_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \text{ olur.}$$

$$\operatorname{div}(aX + bY) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (af_i + bg_i)}{\partial x_i}$$

$$= a \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + b \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial x_i}$$

$$= a \operatorname{div}(X) + b \operatorname{div}(Y) \text{ bulunur.}$$

3) Rotasyonel Fonksiyon

$M=\{1,2,3\}$ kümesinin tek permütasyonlarının kümesi T_3 olsun.

$\sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=(2,3)$, $\sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=(1,2)$, $\sigma_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=(1,3)$ olmak üzere $T_3=\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}$ dir.

$X=\sum_{i=1}^{3} f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \chi(E^3)$ olmak üzere,

$$\mathrm{rot}: \chi(E^3) \longrightarrow \chi(E^3)$$
$$X \longrightarrow \mathrm{rot}(X)=\sum_{\sigma\in T_3}\left(\frac{\partial f_{\sigma(3)}}{\partial x_{\sigma(1)}}-\frac{\partial f_{\sigma(1)}}{\partial x_{\sigma(3)}}\right)\frac{\partial}{\partial x_{\sigma(2)}}$$ fonksiyonuna

rotasyonel fonksiyon denir. Bu ifade açık olarak yazılırsa,

$$\mathrm{rot}(X)=\left(\frac{\partial f_{\sigma_1(3)}}{\partial x_{\sigma_1(1)}}-\frac{\partial f_{\sigma_1(1)}}{\partial x_{\sigma_1(3)}}\right)\frac{\partial}{\partial x_{\sigma_1(2)}}+\left(\frac{\partial f_{\sigma_2(3)}}{\partial x_{\sigma_2(1)}}-\frac{\partial f_{\sigma_2(1)}}{\partial x_{\sigma_2(3)}}\right)\frac{\partial}{\partial x_{\sigma_2(2)}}+$$
$$\left(\frac{\partial f_{\sigma_3(3)}}{\partial x_{\sigma_3(1)}}-\frac{\partial f_{\sigma_3(1)}}{\partial x_{\sigma_3(3)}}\right)\frac{\partial}{\partial x_{\sigma_3(2)}}$$

$$\Rightarrow \operatorname{rot} X=\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}-\frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right)\frac{\partial}{\partial x_1}+\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3}-\frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right)\frac{\partial}{\partial x_2}+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}-\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)\frac{\partial}{\partial x_3}$$

bulunur. Rotasyonel fonksiyonu için kısaca,

$$\operatorname{rot}(X)=\nabla\wedge X=\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$ yazılabilir.

Teorem 15. Rotasyonel fonsiyonu lineerdir.

İspat:

$\forall X,Y\in \chi(E^3)$ ve $\forall a,b\in\mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(aX+bY)&=\nabla\wedge(aX+bY)\\&=a(\nabla\wedge X)+b(\nabla\wedge Y)\\&=a\operatorname{rot}(X)+b\operatorname{rot}(Y)\end{aligned}$$

PROBLEMLER

1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_3-x_1x_2$ için $\vec{\nabla} f$ gradient vektörünü bulunuz. $P=(1,2,3)\in E^3$ için $\vec{\nabla} f|_P$ değerini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\vec{\nabla} f = \text{Grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right) = (-x_2, -x_1, 1)$$

$P=(1,2,3)$ için $\vec{\nabla} f|_P = (-x_2,-x_1,1)|_P = (-P_2,-P_1,1) = (-2,-1,1)$ olur.

2) Aşağıda verilen X vektör alanları için $\text{div}(X)$ değerini hesaplayınız.

a) $X=(0,1)$ b) $X_P=-P,\ P\in E^2$ c) $X=(x_2,-x_1)$ d) $X=(x_1^2x_2,\ x_1x_2^2)$

Çözüm:

$$X=\sum_{i=1}^{n} f_i\frac{\partial}{\partial x_i} \text{ için } \text{div}(X)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i} \text{ idi.}$$

a) $X=(0,1)=0\frac{\partial}{\partial x_1}+1\frac{\partial}{\partial x_2} \Rightarrow \operatorname{div}(X)=\frac{\partial 0}{\partial x_1}+\frac{\partial 1}{\partial x_2}=0$

b) $X(p)=-p=(-p_1,-p_2)=-p_1\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p-p_2\frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_p \Rightarrow X=-x_1\frac{\partial}{\partial x_1}-x_2\frac{\partial}{\partial x_2}$

$\Rightarrow \operatorname{div}(X)=\frac{\partial(-x_1)}{\partial x_1}+\frac{\partial(-x_2)}{\partial x_2}=-1+(-1)=-2$

3) Aşağıda verilen fonksiyonlara gradient operatörünü, ardından divergens operatörünü uygulayınız.

a) $f(x_1,x_2)=x_1+x_2$ b) $f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$ c) $f(x_1,x_2)=x_1-x_2$ d) $f(x_1,x_2)=x_1^2-x_2^2$

Çözüm:

a) $\operatorname{Grad} f=\vec{\nabla} f=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)=(1,1)=1\frac{\partial}{\partial x_1}+1\frac{\partial}{\partial x_2}$

$\operatorname{div}(\operatorname{Grad} f)=\frac{\partial 1}{\partial x_1}+\frac{\partial 1}{\partial x_1}=0$

4) Aşağıda verilen X vektör alanları için rot(X) değerini hesaplayınız.

a) $X = x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$

b) $X = x_2^2 \frac{\partial}{\partial x_1} + (x_1^2 - x_3^2) \frac{\partial}{\partial x_2} + e^{x_3} \frac{\partial}{\partial x_3}$

Çözüm:

a. $\operatorname{rot}(X) = \nabla \wedge X$ idi.

$$\Rightarrow \operatorname{rot}(X) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ x_1 x_2 & x_2 x_3 & x_1 x_3 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{rot}(X) = \left(\frac{\partial x_1 x_3}{\partial x_2} - \frac{\partial x_2 x_3}{\partial x_3}, \frac{\partial x_1 x_2}{\partial x_3} - \frac{\partial x_1 x_3}{\partial x_1}, \frac{\partial x_2 x_3}{\partial x_1} - \frac{\partial x_1 x_2}{\partial x_2} \right)$$

$$= (-x_2, -x_3, -x_1).$$

$$= -x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + (-x_3) \frac{\partial}{\partial x_2} + (-x_1) \frac{\partial}{\partial x_3} \text{ bulunur.}$$

5) $\forall X \in \chi(E^3)$ için $div(rot X) = 0 \in C(E^3, \mathbb{R})$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$rot X = \nabla \wedge X$, $div X = \langle \nabla, X \rangle$ olduğundan $div(rot X) = \langle \nabla, rot X \rangle$

$\Rightarrow div(rot X) = \langle \nabla, \nabla \wedge X \rangle = det(\nabla, \nabla, X) = 0$ olur.

$\left(\langle \alpha, \beta \wedge \gamma \rangle = det(\alpha, \beta, \gamma) \text{ dır} \right)$

6) $\forall f \in C(E^3, \mathbb{R})$ için $rot(grad f) = 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$rot(grad f) = \nabla \wedge grad f = \nabla \wedge \nabla f$$

$$\Rightarrow rot(grad f) = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right) - \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right), \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right), \right.$$
$$\left. \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) \right)$$

$$\Rightarrow rot(grad f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} \right)$$

$$= (0,0,0)$$

$$= 0 \in \chi(E^3)$$

7) $\forall f, g \in C(E^n, \mathbb{R})$ için $grad(fg) = f\, grad\, g + g\, grad\, f$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$grad f = \vec{\nabla} f \quad \Rightarrow grad(fg) = \vec{\nabla}(fg)$$

$$\Rightarrow grad(fg) = \left(\frac{\partial fg}{\partial x_1}, \frac{\partial fg}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial fg}{\partial x_n} \right)$$

$$= \left(f \frac{\partial g}{\partial x_1} + g \frac{\partial f}{\partial x_1}, f \frac{\partial g}{\partial x_2} + g \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, f \frac{\partial g}{\partial x_n} + g \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

$$= f\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial x_n} \right) + g\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

$$= f\, grad\, g + g\, grad\, f$$

8) $\forall X \in \mathcal{X}(E^n)$ ve $\forall f \in C(E^n, \mathbb{R})$ için

$\operatorname{div}(fX) = f \operatorname{div} X + \langle X, \nabla f \rangle$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$X = \sum_{i=1}^{n} g_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ olsun. $fX = \sum_{i=1}^{n} f g_i \frac{\partial}{\partial x_i} = (fg_1, fg_2, \ldots, fg_n)$ olur.

$$\operatorname{div}(fX) = \langle \nabla, fX \rangle = \frac{\partial (f g_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial (f g_2)}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial (f g_n)}{\partial x_n}$$

$$\Rightarrow \operatorname{div}(fX) = \left(f \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + g_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}\right) + \left(f \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + g_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) + \cdots + \left(f \frac{\partial g_n}{\partial x_n} + g_n \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

$$= f\left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial g_n}{\partial x_n}\right) + \left(g_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + g_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + g_n \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

$$= f \operatorname{div} X + \langle X, \nabla f \rangle$$

9) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ fonksiyonunun singüler ve regüler noktalarını bulunuz.

Çözüm:

$$\vec{\nabla} f = \text{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (2x, 2y)$$

$P = (P_1, P_2) \in E^2$ singüler nokta ise $\vec{\nabla} f|_P = 0$ dır.

$$\Rightarrow (2x|_P, 2y|_P) = 0 \Rightarrow (2P_1, 2P_2) = 0$$

$\Rightarrow P_1 = P_2 = 0$. O halde $P = (0,0) = 0$ olur. $P \neq 0$ dışındaki noktalar regülerdir.

10) $P = (1, -1, 2)$ noktası $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 - x_2 x_3$ fonksiyonu için regüler nokta mıdır?

Çözüm:

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) = (2x_1 x_2,\ x_1^2 - x_3,\ -x_2) \text{ olup}$$

$\vec{\nabla} f|_P = (2P_1 P_2,\ P_1^2 - P_3,\ -P_2) = (-2, -1, 1) \neq 0$ dır. O halde P, regülerdir.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

DİFERANSİYEL GEOMETRİ I

Gradient, Divergens ve Rotasyonel Fonksiyon, Problem Çözümü

Ders 12