ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

DİFERANSİYEL GEOMETRİ I

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 11

KOTANJANT VEKTÖR VE KOTANJANT UZAY

Hatırlatma (Dual Uzay): V ve W, $\mathcal{F}$ cismi üzerinde iki vektör uzayı olsun. V den W ye olan bütün lineer dönüşümlerin kümesi $Hom(V,W)$ ile gösterilir. Buna göre $Hom(V,W) = \{A \mid A: V \xrightarrow{lin} W\}$ dir.

$Hom(V,W)$ kümesi $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. Özel olarak $W = \mathcal{F}$ alınırsa $Hom(V,\mathcal{F})$ vektör uzayına V nin dual uzayı denir ve V^* ile gösterilir. O halde,

$$V^* = Hom(V,\mathcal{F}) = \{v^* \mid v^*: V \xrightarrow{lin} \mathcal{F}\}$$ şeklindedir.

Not: V, n-boyutlu vektör uzayı, V^* V nin dual uzayı ve $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ V nin bazı olsun. $\alpha_i^*(\alpha_j) = \delta_{ij}$, $1 \leq i,j \leq n$ olacak biçimde V^* ın bir $\{\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*\}$ bazı daima vardır. Buna göre $boy V^* = boy V$ dir. Bu iki baza dual bazlar denir

Tanım: $p\in E^n$ noktasındaki tanjant uzay $T_{E^n}(p)$ olsun. $T_{E^n}(p)$ uzayının dual uzayı olan $T^*_{E^n}(p)$ uzayına E^n nin $p\in E^n$ noktasındaki **kotanjant uzay**, bu uzayın herbir elemanına da E^n nin $p\in E^n$ noktasındaki bir **kotanjant vektör** adı verilir.

$T^*_{E^n}(p)$ nin elemanları:

Dual uzay tanımı gereğince $T^*_{E^n}(p)=\mathrm{Hom}(T_{E^n}(p),\mathbb{R})$ olup $\vec{V}_p\in T_{E^n}(p)$ için $\vec{V}_p^*\in T^*_{E^n}(p)$ dir. $\vec{V}_p^*: T_{E^n}(p)\to\mathbb{R}$ bir Lineer dönüşümdür.

$\vec{V}_p=(p,\vec{v})$; $p\in E^n$, $v\in\mathbb{R}^n$ olmak üzere $\vec{V}_p^*=(p,\vec{v}^*)$; $p\in E^n$, $\vec{v}^*\in(\mathbb{R}^n)^*$ şeklinde de gösterilebilir. $\vec{v}^*\in(\mathbb{R}^n)^*$ demek $\vec{v}^*:\mathbb{R}^n\xrightarrow{\text{Lin.}}\mathbb{R}$ demektir.

$T^*_{E^n}(p)$ de toplama ve skalar ile çarpma:

$\forall\,\vec{V}_p^*, \vec{W}_p^*\in T^*_{E^n}(p)$ için $\vec{V}_p^*+\vec{W}_p^*=(p,v^*)+(p,w^*)=(p,v^*+w^*)$

$\lambda\in\mathbb{R}$ için $\lambda\vec{V}_p^*=\lambda(p,\vec{v}^*)=(p,\lambda\vec{v}^*)$ şeklindedir.

Uyarı: $\forall \vec{V}_p^* \in T_{E^n}^*(p)$ için $\vec{V}_p^* : T_{E^n}(p) \xrightarrow{\text{lin.}} \mathbb{R}$ olduğundan $\forall \vec{X}_p \in T_{E^n}(p)$ için $\vec{V}_p^*(\vec{X}_p) \in \mathbb{R}$ dir.

1-FORM VE 1-FORM UZAYI

$P \in E^n$ noktasındaki kotanjant uzay $T_{E^n}^*(p)$ ve bu uzayların birleşimi de $\bigcup_{P \in E^n} T_{E^n}^*(p)$ olsun. $\omega : E^n \to \bigcup_{P \in E^n} T_{E^n}^*(p)$ dönüşümüne E^n üzerinde 1-form denir. Buna göre E^n de bir 1-form, E^n nin her noktasına bir kotanjant vektör karşılık getiren fonksiyondur. E^n üzerindeki 1-formların kümesi $\chi^*(E^n)$ veya $\Omega^1(E^n)$ ile gösterilir.

$\chi^*(E^n)$ de toplama:

$\forall \omega, z \in \chi^*(E^n)$ için ω ile z nin toplamı $\omega + z$ ile gösterilir ve $\forall p \in E^n$ için $(\omega + z)(p) = \omega(p) + z(p)$ ile tanımlanır.

Skalar ile çarpma:

$\forall \omega \in \chi^*(E^n)$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için λ ile ω nın çarpımı $\lambda\omega$ ile gösterilir ve $\forall p \in E^n$ için $(\lambda\omega)(p) = \lambda\omega(p)$ ile tanımlanır.

Sonuç: Yukarıdaki iki işlem ile birlikte $\chi^*(E^n)$ kümesi $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayıdır. Bu uzaya E^n üzerindeki **1-form uzayı** denir.

Diferansiyel Operatör

$$d : C(E^n, \mathbb{R}) \to \chi^*(E^n)$$

$$f \to df : \chi(E^n) \to C(E^n, \mathbb{R})$$

$$X \to df(X) = X[f]$$

ile tanımlanan d dönüşümüne **diferansiyel operatör** denir.

Teorem 12. $d : C(E^n, \mathbb{R}) \to \chi^*(E^n)$ operatörü aşağıdaki özellikleri sağlar:

1) d lineerdir

2) $\forall f, g \in C(E^n, \mathbb{R})$ için $d(fg) = f\,dg + g\,df$

İspat:

1) $\forall a,b \in \mathbb{R}$ ve $\forall f,g \in C(E^n,\mathbb{R})$ için $d(af+bg) \stackrel{?}{=} adf + bdg$

$\forall X \in \chi(E^n)$ için $d(af+bg)[X] = X[af+bg]$

$$= aX[f] + bX[g]$$

$$= a\,df(X) + b\,dg(X)$$

$$= (a\,df + b\,dg)(X)$$

$\Rightarrow d(af+bg) = a\,df + b\,dg$

2) $d(fg) \stackrel{?}{=} f\,dg + g\,df$

$\forall X \in \chi(E^n)$ için $d(fg)[X] = X[fg]$

$$= fX[g] + gX[f]$$

$$= f\,dg(X) + g\,df(X)$$

$$= (f\,dg + g\,df)(X)$$

$\Rightarrow d(fg) = f\,dg + g\,df$

Örnek: E^n de $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ Öklid koordinat sistemi verilsin.

dx_i, $1 \leq i \leq n$, fonksiyonları E^n üzerinde 1-formdur:

dx_i lerin 1-form olduğunu göstermek için

$$dx_i : E^n \longrightarrow \bigcup_{p \in E^n} T^*_{E^n}(p)$$

$$p \longrightarrow dx_i|_p$$

olduğunu yani $dx_i|_p \in T^*_{E^n}(p)$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için de $dx_i|_p : T_{E^n}(p) \longrightarrow \mathbb{R}$ lineer olduğunu göstermeliyiz:

$\forall X_p, Y_p \in T_{E^n}(p)$ ve $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} dx_i|_p(aX_p + bY_p) &= (aX_p + bY_p)[x_i] \\ &= aX_p[x_i] + bY_p[x_i] \\ &= a\, dx_i|_p(X_p) + b\, dx_i|_p(Y_p) \end{aligned}$$

$\Rightarrow dx_i|_p : T_{E^n}(p) \longrightarrow \mathbb{R}$ lineerdir.

$\Rightarrow dx_i|_p \in T^*_{E^n}(p)$

$\Rightarrow dx_i \in \chi^*(E^n)$ dir.

$T_{E^n}^*(p)$ ve $\mathcal{X}^*(E^n)$ nin bazları:

$\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p\right\}$ kümesinin $T_{E^n}(p)$ nin bazı olduğunu biliyoruz.

$dx_i|_p \in T_{E^n}^*(p)$, $1 \leq i \leq n$, olmak üzere $\{dx_1|_p, dx_2|_p, \ldots, dx_n|_p\}$ kümesi verilsin.

$$dx_i|_p\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p [x_i] = \frac{\partial x_i}{\partial x_j}\Big|_p = \delta_{ij}$$

olduğundan dual baz tanımı gereğince $\{dx_1|_p, dx_2|_p, \ldots, dx_n|_p\}$ kümesi $T_{E^n}^*(p)$ kotanjant uzayının bazıdır.

$\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ kümesinin $\mathcal{X}(E^n)$ nin bazı olduğunu biliyoruz.

$$dx_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}[x_i] = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$$

olduğundan $\{dx_1, dx_2, \ldots, dx_n\}$ kümesi $\mathcal{X}^*(E^n)$ 1-form uzayının bazıdır.

Örnek:

$$w^* = \sum_{i=1}^{n} f_i dx_i \in \chi^*(E^n), \quad \forall X = \sum_{i=1}^{n} g_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \chi(E^n) \text{ ve } f_i, g_i \in C(E^n, \mathbb{R})$$

olmak üzere $w^*(X) = \sum_{i=1}^{n} f_i g_i$ dir:

$$\forall p \in E^n \text{ için } (w^*(X))(p) = \left(\left(\sum_{i=1}^{n} f_i dx_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} g_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right)(p)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} f_i(p) dx_i|_p\right)\left(\sum_{j=1}^{n} g_j(p) \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p\right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} f_i(p) g_j(p)\, dx_i|_p \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p\right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} f_i(p) g_j(p) \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p [x_i]$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} f_i(p) g_j(p) \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial x_j}\Big|_p}_{\delta_{ij}} = \sum_{j=1}^{n} f_j(p) g_j(p)$$

$$\Rightarrow (W^*(X))(P) = \left(\sum_{j=1}^{n} f_j g_j\right)(P) \Rightarrow W^*(X) = \sum_{j=1}^{n} f_j g_j \text{ olur.}$$

Not: $\forall X \in \chi(E^n)$ için $W^*(X) \in C(E^n, \mathbb{R})$ olduğundan W^* 1-formunu

$$W^*: \chi(E^n) \to C(E^n, \mathbb{R})$$

$$X \to W^*(X): E^n \to \mathbb{R}$$

$$P \to (W^*(X))(P) = (W^*(P))(X_P)$$

olarak düşünülebilir. O halde W^* 1-formu bazen noktaya kotanjant vektör karşılık getiren fonksiyon bazen de $\chi(E^n)$ den $C(E^n, \mathbb{R})$ ye fonksiyon olarak alınabilir.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

DİFERANSİYEL GEOMETRİ I

Kotanjant Vektör ,1-Form

Ders 11